Devoir surveillé 4

Vendredi 30 novembre 2018
L'usage des calculatrices n'est pas autorisé

Vous attacherez la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction, même si tout résultat qui n'est pas explicitement dans le cours de MPSI ou de MP doit être démontré. Si vous repèrez ce qui semble être une erreur d'énoncé, signalez le sur votre copie et poursuivez votre composition en expliquant les raisons des initiatives que vous avez été amené à prendre.

Consignes à respecter sous peine d'être pénalisé :

- Utiliser des copies doubles.
- Changer de feuille/copie à chaque exercice ou partie d'un problème.
- Faire clairement apparaître le numéro (et le cas échéant la partie) de la question traitée.
- Souligner les résultats intermédiaires dans une démonstration à tiroirs.
- Faire une phrase de conclusion répondant clairement à la/les question(s) posées, et encadrer le résultat.

Exercice 1

On considère dans cet exercice la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in]0,1[, f(x) = \exp\left(\frac{1}{x(x-1)}\right) \text{ et } f(x) = 0 \text{ sinon.}$$

1. **a.** Démontrer que le graphe de f possède un axe de symétrie.

b. Dresser le tableau des variations de f, et préciser l'allure de sa courbe représentative.

c. Pourquoi peut-on affirmer que pour tout entier naturel p, f est de classe $\mathcal{C}^p$ sur $]0,1[$.

d. Démontrer que pour tout entier naturel p, il existe un polynôme Q_p tel que

$$\forall x \in]0,1[, f^{(p)}(x) = \frac{Q_p(x)}{(x(x-1))^{2p}} f(x)$$

et exprimer Q_p en fonction de Q_{p-1} et Q'_{p-1}.

e. Montrer que $deg(Q_p) \leq 3p$.

f. Calculer pour tout entier naturel p, la limite suivante : $\lim_{x\to 0^+} f^{(p)}(x)$.

2. Démontrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. Préciser l'allure du graphe de f aux points $x = 1$ et $x = 0$.

Exercice 2

On munit l'espace vectoriel $E = \mathcal{C}^\infty([0,1],\mathbb{R})$ des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur le segment $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, de la norme $||.||_\infty$ définie par

$$\forall f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{C}), ||f||_\infty = \sup(|f(x)|, x \in [0,1]).$$

F désigne la partie de E constituée des fonctions $f \in E$ telles que la suite $(||f^{(n)}||_\infty)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la propriété

$$(P) : ||f^{(n)}||_\infty = o(n!).$$

1. Pour une suite (u_n), rappeler la définition de la propriété : $u_n = o(n!)$. Les suites $(e^n), (n^n)$ sont elles $o(n!)$?

2. Soit a un réel strictement positif donné. On considère la fonction $f_a : x \mapsto f_a(x) = \dfrac{1}{a+x}$.

a. Montrer que $f_a \in E$.

b. Pour tout réel $x \in [0,1]$, donner l'expression de $f_a^{(n)}(x)$ en fonction de n et de x et calculer $||f_a^{(n)}||_\infty = \sup_{x\in[0,1]}\{||f_a^n(x))||\}$ en fonction de l'entier naturel n.

c. Pour quelles valeurs de $a > 0$ la fonction f_a appartient elle à F.

3. Démontrer que F est un sous espace vectoriel de E.

4. Soit $f \in F$. On définit la fonction polynôme P_n par : $\forall x \in [0,1], P_n(x) = \sum_{k=0}^n \dfrac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$.

a. Pour $x \in [0,1]$, majorer $|f(x) - P_n(x)|$, puis démontrer que pour tout entier naturel n, $||f - P_n||_\infty \leq \dfrac{||f^{(n+1)}||_\infty}{(n+1)!}$.

b. En déduire que pour tout réel $x \in [0,1]$, la suite $(P_n(x))$ converge vers $f(x)$.

c. Justifier à l'aide des résultats obtenus précédemment que pour tout réel $a > 1$ et pour tout réel $x \in [0,1]$,

$$\frac{1}{a+x} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{a^{k+1}}x^k.$$

Exercice 3

Une fonction F est dite **log-convexe** sur un intervalle I si $\ln \circ F$ a un sens et est une fonction convexe sur I.

1. a. Montrer que f est log-convexe si et seulement si $f > 0$ et si :

$$\forall \lambda \in [0,1], \forall (a,b) \in I, f(\lambda a + (1-\lambda)b) \leq f(a)^\lambda f(b)^{1-\lambda}.$$

b. Montrer que la fonction ch est log-convexe sur $\mathbb{R}$ et que pour tout $\alpha \leq 0$, la fonction $t \mapsto t^\alpha$ est log-convexe sur $\mathbb{R}_+^*$.

c. Montrer que toute fonction log-convexe est convexe.

d. Montrer que f est log-convexe si et seulement si $f > 0$ et si $t \mapsto f(t)C^t$ est convexe pour chaque réel $C > 0$.

2. Soit F définie sur $\mathbb{R}_+$ vérifiant les conditions

$$(\star) : F \text{ est log-convexe sur } \mathbb{R}_+, F(0) = 1 \text{ et } \forall t \geq 1, F(t) = tF(t-1).$$

a. Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}$, $F(k) = k!$.

b. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in]0,1]$. En exploitant les inégalités des pentes aux points $n, n+t$ et $n+1$, montrer que

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{N!N^t}{(t+1)(t+2)\cdots(t+N)} = F(t).$$

c. En déduire l'existence et l'unicité d'une telle fonction F vérifiant les conditions $(\star)$.

PROBLÈME

Pour tout $t > 0$, on définit :

$$f(t) = \exp\left(-\frac{1}{t}\right) \text{ et } g(t) = \frac{f(t)}{t}.$$

Partie A : généralités

1. Prouver que f et g sont $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et que pour tout $t > 0, tf'(t) = g(t)$.

2. Montrer que g est prolongeable par continuité en 0 et que le prolongement (encore noté g) est dérivable en 0.

3. Faire un tableau de variations de g sur $\mathbb{R}_+$, en faire un graphe sachant que $e^{-1} = 0.36...$

4. Soit H la primitive sur $\mathbb{R}_+$ de $t \mapsto g(1/t)$ s'annulant en 1 :

a. Calculer H.

b. En former en développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 1.

5. Soit $n \geq 3$ un entier naturel. On introduit l'équation $(E_n) : f(t) = t/n$, d'inconnue $t \in \mathbb{R}_+^*$.

a. En utilisant la question **3**, montrer que (E_n) a une unique solution dans $]0, 1[$, que l'on notera α_n. On montrerait identiquement (mais ce n'est pas à faire) que (E_n) admet une unique solution dans $]1, +\infty[$ que l'on notera β_n.

b. Montrer que les suites (α_n) et (β_n) sont monotones.

c. Est-il possible que l'une des deux suites converge vers une limite $\ell > 0$? En déduire leurs limites.

Partie B : Étude d'une courbe paramétrée :

On étudie ici, dans une repère orthonormal d'origine O, la courbe paramétrée définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par le point $M(t)$ de coordonnées $(x(t), y(t)) = (f'(t), g(t))$.

1. Déterminer les valeurs de t pour lesquelles $M(t)$ se situe sur la prémière bissectrice du plan d'équation cartésienne $y = x$.

2. Étudier la limite de la pente de la droite $(OM(t))$ lorsque t tend vers 0^+ et $+\infty$.

3. En utilisant les deux questions précédentes, tracer la courbe en repérant les tangentes verticales ou horizontales, on pourra utiliser que $4e^{-2} = 0.54...$

Partie C : Fonctions définies par des intégrales

On prolonge maintenant f à $\mathbb{R}_+$, en posant $f(0) = 0$.

1. Montrer que l'application f ainsi prolongée est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$; préciser $f'(0)$ et montrer que l'égalité de la question **1** reste valable pour $t = 0$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$, on note :

$$F(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t, \qquad G(x) = \int_0^x g(t)\mathrm{d}t.$$

a. Justifier l'existence de ces intégrales *que l'on ne cherchera surtout pas à calculer* puis montrer que $F(x) = x\exp(-1/x) - G(x)$.

b. En séparant l'intégrale $G(x)$ en deux, montrer qu'il existe une constante C réelle telle que pour tout $x \geq 1$,

$$0 \leq G(x) \leq C + \ln x.$$

c. En déduire que $G(x)$ est négligeable devant x au voisinage de $+\infty$ ainsi qu'un équivalent de $F(x)$ au voisinage de $+\infty$.

3. Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$, l'équation différentielle (E) : $x^2y' + y = x^2$, l'expression générale de la solution fera apparaître la fonction F.

Partie D : Étude qualitative d'une équation différentielle

On considère maintenant une application y solution de (E) : $x^2y' + y = x^2$ cette fois sur $\mathbb{R}_+$, de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+$. Nous allons, *sans aucun calcul explicite de y*, déterminer entièrement la suite des $u_n = y^{(n)}(0)$ à partir de l'équation (E).

1. Que vaut $u_0 = y(0)$?

2. En dérivant (E), calculer $u_1 = y'(0)$ et $u_2 = y''(0)$.

3. Peut-on avoir y de la forme : $x \mapsto \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ avec $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$?

4. Soit $n \in \mathbb{N}$.

a. On suppose ici $n \geq 3$. Prouver à l'aide de la formule de Leibniz que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:

$$x^2y^{(n+1)}(x) + (1 + 2nx)y^{(n)}(x) + n(n-1)y^{(n-1)}(x) = 0.$$

En déduire une relation de récurrence entre u_n et u_{n-1}.

b. Donner une expression de u_n utilisant une factorielle, valable pour tout $n \geq 2$; en déduire les developpements limités (dont on justifiera l'existence) de y à tout ordre au voisinage de 0.

Fin

Exercice 3

1. **a.** La composée $\ln\circ f$ est définie ssi $f > 0$. Par ailleurs, la convexité de $\ln\circ f$ se traduit par : $\forall\lambda\in[0,1], \forall(a,b)\in I, \ln\circ f(\lambda a+(1-\lambda)b) \leq \lambda \ln\circ f(a) + (1-\lambda)\ln\circ f(b) = \ln(f(a)^\lambda f(b)^{1-\lambda})$

On conclut par croissance de la fonction exponentielle.

b. La fonction $\ln\circ \mathrm{ch}$ est définie sur $\mathbb{R}$ et dérivable et $(\ln\circ\mathrm{ch})' = \dfrac{\mathrm{ch}'}{\mathrm{ch}} = \dfrac{\mathrm{sh}}{\mathrm{ch}} = \mathrm{th}$ qui est croissante. Donc par caractérisation des fonctions convexes dérivables, $\ln\circ\mathrm{ch}$ est convexe sur $\mathbb{R}$.

Pour tout $\alpha\leq 0$, la fonction $t\mapsto \ln(t^\alpha) = \alpha\ln(t)$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. La fonction ln est concave. Comme $\alpha\leq 0$, la fonction $\alpha\ln$ est convexe.

c. Soit f une fonction log-convexe. Alors $\ln\circ f$ est convexe. On sait que la fonction exp est **croissante** et convexe et il est facile de vérifier que la composée d'une fonction convexe avec d'une fonction croissante et convexe est aussi convexe.

Donc f est convexe.

d. $\Rightarrow$ Montrer que f est log-convexe si et seulement si $f > 0$ et si $t\mapsto f(t)C^t$ est convexe pour chaque réel $C > 0$.

2. Soit F log-convexe sur $\mathbb{R}_+$ vérifiant $F(0) = 1$ et $\forall t\geq 1, F(t) = tF(t-1)$.

a. Montrer que $\forall k\in\mathbb{N}$, $F(k) = k!$.

b. Soient $n\in\mathbb{N}^*$ et $t\in]0,1]$. En exploitant les inégalités des pentes aux points $n, n+t$ et $n+1$, montrer que

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{N!N^t}{(t+1)(t+2)\cdots(t+N)} = F(t).$$

c. En déduire l'unicité d'une telle fonction F.