DS 4 : 4h

Vendredi 1 décembre 2017
L'usage des calculatrices n'est pas autorisé

Consignes à respecter sous peine d'être pénalisé :
• Changer de copie (ou au moins de feuille) à chaque exercice ou partie d'un problème.
• Numéroter les questions (et le cas échéant la partie).
• Souligner les résultats intermédiaires dans une démonstration à tiroirs, faire une phrase de conclusion et encadrer le résultat.

Questions de cours

1. Soit f linéaire de E dans F. Énoncer un maximum de conditions suffisantes permettant de montrer que f est continue en précisant le cas échéant celles qui sont nécessaires.

2. Énoncer le théorème des valeurs intermédiaires pour une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Quel est son équivalent vectoriel ?

3. Énoncer le théorème des bornes atteintes pour une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Quel est son équivalent vectoriel ?

4. Rappeler la définition d'une fonction uniformément continue sur un intervalle I.
Donner l'exemple d'une fonction uniformément continue non lipschitzienne.

5. Énoncer le théorème de l'intégrale nulle.

6. Soit $I = \displaystyle\int_{-2}^{0} \frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x+8}}\,\mathrm{d}x$.

a. Justifier l'existence de I.

b. Déterminer des réels a, b, c tels que $x^2+4x+8 = a((bx+c)^2+1)$.

c. Après justifications, effectuer le changement de variables $\dfrac{x}{2}+1 = \tan t$.

d. Calculer I.

Exercice 1

On considère l'espace vectoriel $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ des fonctions continues sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
On munit E de la norme $||.||_\infty$ définie pour $f \in E$ par $||f||_\infty = \sup_{x\in[0,1]}\{|f(x)|\}$.

Soit $f \in E$. On pose $\forall x \in I, g(x) = \exp(-x)\displaystyle\int_0^x \exp(t)f(t)\,\mathrm{d}t$.

1. a. Démontrer que l'application $\phi : f \mapsto \phi(f) = g$ est un endomorphisme de E.

b. Calculer $\exp(-x)\displaystyle\int_0^x \exp(t)\,\mathrm{d}t$.

c. En déduire que l'application ϕ est continue de $(E, ||.||_\infty)$ dans $(E, ||.||_\infty)$.

2. On considère la suite de fonctions définie par $f_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, f_{n+1} = \phi(f_n)$.

a. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f_n(x)| \leq (1-e^{-1})^n$.

b. En déduire que la série $\sum f_n(x)$ est absolument convergente.

c. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_{n+1} est dérivable sur $[0,1]$ et exprimer $f'_{n+1}(x)$ en fonction de $f_n(x)$ et de $f_{n+1}(x)$.

d. En déduire que la série $\sum f'_n(x)$ est convergente et calculer sa somme.

Exercice 2

Soit $O_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : M^t M = I_n\}$.

1. Montrer que $(O_n(\mathbb{R}), \times)$ est un groupe multiplicatif.
Pour une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de coefficients $m_{i,j}$, on pose $||M|| = \max_{(i,j)\in[1,n]^2} |m_{i,j}|$. On admet que $||.||$ est une norme.

2. Montrer que si $M \in O_n(\mathbb{R})$, alors $||M|| \leq 1$.

3. En déduire rigoureusement que $O_n(\mathbb{R})$ est un compact de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

4. Soit $M \in O_n(\mathbb{R})$. Montrer que $|\det(M)| = 1$.

5. L'ensemble $O_n(\mathbb{R})$ est-il connexe par arcs ?

6. **a.** Soit $M \in O_2(\mathbb{R})$ telle que $\det(M) = 1$. Montrer qu'il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $M = \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}$.

b. En déduire que $SO_2(\mathbb{R}) = \{M \in O_2(\mathbb{R}) : \det(M) = 1\}$ est connexe par arcs.

7. On note $SU(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & -\overline{\beta} \\ \beta & \overline{\alpha} \end{pmatrix} : (\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2, |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \right\}$.

a. Montrer que $\mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$ est connexe par arcs (on pourra faire des schémas).

b. En déduire que la sphère unité S de $(\mathbb{R}^4, ||.||_2)$ est connexe par arcs.

c. Soit $\phi : S \to SU(2)$ telle que $\phi(a, b, c, d) = \begin{pmatrix} a + ib & -c + id \\ c + id & a - ib \end{pmatrix}$.

Montrer que ϕ est bijective et continue.

d. En déduire que $SU(2)$ est connexe par arcs.

e. Déterminer une loi $\star$ sur $S = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 : a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1\}$ telle que $\phi : (S, \star) \to (SU(2), \times)$ soit un isomorphisme de groupes.

Problème :

Étant donné un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et un réel a, on dit qu'une fonction réelle f définie au voisinage de a est *plate à l'ordre n en a* lorsque $f(x) - f(a)$ est négligeable devant $(x - a)^n$ mais pas devant $(x - a)^{n+1}$ lorsque x tend vers a.
On dit que f est *ultraplate en a* lorsque $f(x) - f(a)$ est négligeable devant $(x - a)^m$ lorsque x tend vers a, quel que soit l'entier naturel m.

Partie 1 : étude des espaces $E_n(a)$.

On note E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications de classe C^∞ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, dont on rappelle qu'il possède aussi une structure d'anneau commutatif et d'algèbre.
Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ et tout réel a, on note $E_n(a)$ l'ensemble des fonctions de E telles que la différence $f(x) - f(a)$ soit négligeable devant $(x - a)^n$ lorsque x tend vers a.

1. Soit $f \in E, a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.
Démontrer, en utilisant une formule de Taylor, que la fonction f appartient à $E_n(a)$ si et seulement si pour tout entier k compris entre 1 et n, la dérivée d'ordre k de f en a est nulle :

$$f \in E_n(a) \Leftrightarrow \forall k \in [1, n], f^{(k)}(a) = 0.$$

2. Un exemple de fonction ultraplate en 0.

Pour tout $x > 0$, on pose $b(x) = \exp(-(\ln x)^2)$.

a. Étudier la fonction b, donner l'allure du graphe de b en précisant les coordonnées de ses points d'inflexion (les points où la dérivée seconde change de signe).

b. Justifier que b est de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$ et prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un polynôme $B_n \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que

$$\forall x > 0, b^{(n)}(x) = \frac{B_n(\ln x)}{x^n} \exp(-(\ln x)^2).$$

(on précisera le degré et le coefficient du monôme dominant de B_n).

c. En déduire que la fonction $c : x \mapsto \begin{cases} b(|x|) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ est ultraplate en 0.

d. En quels autres points est-elle plate et à quel ordre ?

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

a. Montrer que pour tout réel a, $E_n(a)$ est une sous-algèbre de E.

b. L'ensemble $E_n(a)$ est-il un idéal de l'anneau commutatif E ?

c. Montrer que si f est ultraplate en 0, alors $g : x \mapsto f(x - a)$ est ultraplate en a.

4. Construire à l'aide de la fonction c définie plus haut une fonction de E ultraplate à la fois en 0, en $+1$ et en -1.

Partie 2 : interpolations polynomiales avec ajustement de dérivées

1. a. Trouver pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'unique polynôme P_n de $\mathbb{R}_{n+2}[X]$ vérifiant $P_n(0) = 0$ et $P_n(1) = 1$ et tel que la fonction polynomiale P_n appartienne à $E_n(0) \cap E_1(1)$.

b. Soit $x \in [0, 1]$. Montrer que la suite $(P_n(x))_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers une limite notée $\phi(x)$ à préciser en discutant de la valeur de x.

c. La fonction ϕ est-elle continue sur $[0, 1]$?

2. Soit p un nombre entier supérieur ou égal à 2, $a_1, a_2, \ldots, a_p$ des nombres réels deux à deux distincts et $n_1, n_2, \ldots, n_p$ des nombres entiers strictement positifs.

Soit $m = p - 1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{p} n_k$.

Soit Φ l'application de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}^{m+1}$ définie par :

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], \Phi(P) = \left(P^{(0)}(a_1), P^{(1)}(a_1), \ldots, P^{(n_1)}(a_1), \ldots, P^{(0)}(a_p), \ldots P^{(n_p)}(a_p)\right)$$

(où la dérivée 0-ième $P^{(0)}$ de P désigne la fonction polynomiale P elle-même).

a. Vérifier que Φ est linéaire.

b. Soit $P \in \ker \Phi$. Montrer que P est divisible par le polynôme $A = \prod_{k=1}^{p} (X - a_k)^{n_k+1}$.

c. En déduire que le noyau de Φ est un supplémentaire de $\mathbb{R}_m[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$.

d. En déduire que pour tout $(b_1, \ldots b_p) \in \mathbb{R}^p$, il existe un unique polynôme P de degré inférieur ou égal à m appartenant à $\displaystyle\bigcap_{k=1}^{p} E_{n_k}(a_k)$ vérifiant :

$$\forall k \in [1, p], P(a_k) = b_k.$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

a. Justifier l'existence d'une unique fonction polynomiale paire H_n de degré inférieur ou égal à $n + 4$, appartenant à $E_n(0) \cap E_1(-1) \cap E_1(+1)$ et telle que $H_n(0) = 0$, $H_n(-1) = H_n(1) = 1$.

b. Calculer H_n selon la parité de n.

Partie 3 : approximations polynomiales

Dans cette partie, on note $\mathcal{B}$ l'ensemble des fonctions bornées de $[-1,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On munit cet espace de la norme $||f||_\infty = \sup_{x\in[-1,1]} |f(x)|$.
Soit F l'espace vectoriel normé obtenu en munissant de la norme $||.||_\infty$ l'espace des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[-1,1]$.

1. L'ensemble des fonctions f de F qui vérifient $f(0)=0$ est-il une partie fermée de F ?

2. Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et $g_n : x\mapsto \sqrt{x^2+1/n}-\sqrt{1/n}$ et $g : x\mapsto |x|$.

a. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} ||g_n - g||_\infty = 0$$

Illustrer par un schéma en précisant les tangentes en 0.

b. En modifiant la suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, montrer que l'ensemble des fonctions f de F pour lesquelles $f(x)$ est négligeable devant x lorsque x tend vers 0 n'est pas une partie fermée de F.

3. On note T l'application qui à une fonction f de F associe la fonction $T(f)$ définie sur $[-1,1]$ par

$$\forall x\in[-1,1], T(f)(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

a. Démontrer que T est une application continue de F dans F.

b. Soit $f\in F$ et $n\in\mathbb{N}^*$. On note T^n la composée n-ième $T\circ T\circ\cdots\circ T$ (n fois T).
Démontrer que $T^n(f)$ est l'unique fonction de F nulle en 0 dont la dérivée n-ième est f et dont toutes les dérivées d'ordre inférieur à n s'annulent en 0.

c. L'application T est-elle injective ? Est-elle surjective ?

4. Soit $k\in\mathbb{N}^*$ et f une fonction de F plate d'ordre k en 0.

a. Justifier à l'aide d'un théorème du cours l'existence d'une suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de fonctions polynomiales telle que

$$\lim_{n\to+\infty} ||P_n - f^{(k+3)}||_\infty = 0.$$

b. Démontrer qu'il existe une fonction polynomiale R de degré inférieur ou égal à $k+2$ telle que

$$\lim_{n\to+\infty} ||T^{k+3}(P_n) - (f+R)||_\infty = 0.$$

c. Justifier l'existence d'une suite de polynômes $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vérifiant les propriétés suivantes :

- pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $Q_n(-1)=f(-1), Q_n(0)=f(0)$ et $Q_n(-1)=f(-1)$;
- pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, Q_n est une fonction plate à l'ordre k en 0 ;
- $\lim_{n\to+\infty} ||Q_n - f||_\infty = 0$.