# Devoir surveillé 3

Vendredi 9 novembre 2018
L'usage des calculatrices n'est pas autorisé

*Vous attacherez la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction, même si tout résultat qui n'est pas explicitement dans le cours de MPSI ou de MP doit être démontré. Si vous repèrez ce qui semble être une erreur d'énoncé, signalez le sur votre copie et poursuivez votre composition en expliquant les raisons des initiatives que vous avez été amené à prendre.*

**Consignes à respecter sous peine d'être pénalisé :**

• Utiliser des copies doubles.
• Changer de feuille/copie à chaque exercice ou partie d'un problème.
• Faire clairement apparaître le numéro (et le cas échéant la partie) de la question traitée.
• Souligner les résultats intermédiaires dans une démonstration à tiroirs.

• Faire une phrase de conclusion répondant clairement à la/les question(s) posées,
et encadrer le résultat.

## Exercice 1

On note $E$ l'espace vectoriel des applications continues de $[-1,1]$ dans $\mathbb{R}$.
On pose, $\forall f \in E$, $N_\infty(f) = \sup\limits_{x\in[-1,1]} |f(x)|$ et $N_2(f) = \sqrt{\displaystyle\int_{-1}^{1} f^2(x)\mathrm{d}x}$.

**1. a.** Démontrer que $N_\infty$ et $N_2$ sont deux normes sur $E$.

**b.** Démontrer qu'il existe $k > 0$ tel que, pour tout $f$ de $E$, $N_2(f) \leq kN_\infty(f)$.

**c.** Démontrer que tout ouvert pour la norme $N_2$ est un ouvert pour la norme $N_\infty$.

**2.** Démontrer que les normes $N_2$ et $N_\infty$ ne sont pas équivalentes.

## Exercice 2

**1. a.** Rappeler la définition d'un compact $K$ d'un espace vectoriel normé $(E, N)$.

**b.** Quels sont les ensembles compacts d'un espace vectoriel $E$ de dimension finie ?

**c.** Soit $K$ un compact de $E$ et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in K^{\mathbb{N}}$.
Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une unique valeur d'adhérence.

**2.** Montrer que l'ensemble $GL_n(\mathbb{C})$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

# Problème

On note, pour $n$ entier tel que $n \geqslant 2$, $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre $n$ à coefficients réels. On s'intéresse dans ce problème, à travers divers exemples, à la réduction de matrices par blocs du type
$\begin{pmatrix} aA & bA \\ cA & dA \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $a, b, c, d$ sont quatre réels non tous nuls.
On rappelle qu'un produit de matrices par blocs se fait de manière similaire à un produit classique :

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AA' + BC' & AB' + BD' \\ CA' + DC' & CB' + DD' \end{pmatrix}$$

(chaque matrice bloc étant une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$).
On pourra utiliser sans démonstration que si $P \in GL_n(\mathbb{R})$, $A$ et $B$ sont deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $T$ est un polynôme, $A = P^{-1}BP \Rightarrow T(A) = P^{-1}T(B)P$.

On rappelle que si $A, B, C$ sont des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} = \det(A)\det(C)$.

## Questions préliminaires

L'objectif est de démontrer le résultat suivant : « une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ si et seulement s'il existe un polynôme $P$ scindé sur $\mathbb{R}$, à racines simples, vérifiant $P(M) = 0$ ».
Pour cela, on considère une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et on note $u$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à $M$.

**Q1.** On suppose que $u$ est diagonalisable et on note $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ ($p \geqslant 1$) les valeurs propres distinctes de $u$. Démontrer que le polynôme $P = (X - \lambda_1) \ldots (X - \lambda_p)$ est annulateur de $u$.

**Q2.** Réciproquement, on suppose que $\mu_1, \ldots, \mu_r$ sont $r$ nombres réels distincts ($r \geqslant 1$) tels que $Q = (X - \mu_1) \ldots (X - \mu_r)$ est un polynôme annulateur de $u$. En utilisant le lemme des noyaux, démontrer que $u$ est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ et que le spectre de $u$ est inclus dans l'ensemble $\{\mu_1, \ldots, \mu_r\}$.

## Un exemple où la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est diagonalisable sur $\mathbb{R}$

**Q3.** On suppose que $V = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$. Démontrer que $V$ est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ et donner une matrice inversible $P$ que l'on notera $P = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ et une matrice diagonale $D$ vérifiant $V = PDP^{-1}$ (on précisera $P^{-1}$).

**Q4.** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On pose alors la matrice par blocs $Q = \begin{pmatrix} \alpha I_n & \beta I_n \\ \gamma I_n & \delta I_n \end{pmatrix}$. Justifier que la matrice $Q$ est inversible, donner la matrice $Q^{-1}$ et démontrer que la matrice $\begin{pmatrix} 4A & 2A \\ -3A & -A \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ est semblable à la matrice $B = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 2A \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$.

**Q5.** On suppose que la matrice $A$ est diagonalisable sur $\mathbb{R}$, ce qui signifie qu'il existe une matrice $R$ inversible et une matrice $\Delta$ diagonale tells que $A = R\Delta R^{-1}$. Calculer le produit de matrices par blocs

$$\begin{pmatrix} R^{-1} & 0 \\ 0 & R^{-1} \end{pmatrix} B \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix}$$

Que peut-on en déduire pour la matrice $\begin{pmatrix} 4A & 2A \\ -3A & -A \end{pmatrix}$ ?

**Q6.** On se propose de démontrer la réciproque du résultat précédent. On suppose que la matrice $\begin{pmatrix} 4A & 2A \\ -3A & -A \end{pmatrix}$ est diagonalisable. Soit $T$ un polynôme scindé à racines simples annulateur de cette matrice, calculer $T(A)$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur la matrice $A$ pour que la matrice $\begin{pmatrix} 4A & 2A \\ -3A & -A \end{pmatrix}$ soit diagonalisable.

## Un exemple où la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est trigonalisable sur $\mathbb{R}$

**Q7.** Démontrer que la matrice $E = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ est trigonalisable sur $\mathbb{R}$ et donner une matrice inversible $P$ telle que $E = P \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$.

**Q8.** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, démontrer que la matrice $\begin{pmatrix} 3A & -2A \\ 2A & -A \end{pmatrix}$ est semblable à la matrice $F = \begin{pmatrix} A & -2A \\ 0 & A \end{pmatrix}$.

**Q9.** On suppose que la matrice $F$ est diagonalisable sur $\mathbb{R}$. Soit $U \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme annulateur de $F$, scindé sur $\mathbb{R}$ et à racines simples. On note $U'$ le polynôme dérivé de $U$.

Démontrer que $\begin{pmatrix} U(A) & -2AU'(A) \\ 0 & U(A) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ est la matrice nulle.

**Q10.** Vérifier que le polynôme minimal de la matrice $A$ est $X$. En déduire la valeur de la matrice $A$.

**Q11.** Donner une condition nécessaire et suffisante sur la matrice $A$ pour que la matrice $\begin{pmatrix} 3A & -2A \\ 2A & -A \end{pmatrix}$ soit diagonalisable.

**Q12.** On suppose que la matrice $F$ est trigonalisable sur $\mathbb{R}$. Exprimer le polynôme caractéristique de $F$ en fonction de celui de $A$. En déduire que $F$ est trigonalisable sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $A$ est trigonalisable sur $\mathbb{R}$.

**Q13.** Donner un exemple de matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que la matrice $\begin{pmatrix} 3A & -2A \\ 2A & -A \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ ne soit pas trigonalisable sur $\mathbb{R}$.

## Applications

**Q14.** Soit $u$ un endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique $(e_1, e_2, e_3, e_4)$ de $\mathbb{R}^4$ est

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 6 \\ 2 & 2 & 4 & 4 \\ 2 & 6 & 1 & 3 \\ 4 & 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Déterminer deux sous-espaces vectoriels de dimension 2 stables par $u$.
On pourra s'inspirer de la question **Q4**.

**Q15.** En adaptant la démarche présentée dans le premier exemple de ce problème, démontrer que la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

est diagonalisable sur $\mathbb{R}$. Déterminer une matrice diagonale $D$ et une matrice inversible $P$ telles que $M = PDP^{-1}$.

**Q16.** Utiliser la question **Q15** pour donner les solutions du système différentiel de fonctions inconnues $x_1, x_2, x_3, x_4$ de la variable réelle $t$ :

$$\begin{cases} x_1' = 4x_1 + 2x_3 \\ x_2' = 4x_2 + 2x_4 \\ x_3' = 2x_1 + 4x_3 \\ x_4' = 2x_2 + 4x_4 \end{cases}$$

(on ne demande pas de détails).

# Fin

# Devoir surveillé 3

Vendredi 9 novembre 2018
L'usage des calculatrices n'est pas autorisé

*Vous attacherez la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction, même si tout résultat qui n'est pas explicitement dans le cours de MPSI ou de MP doit être démontré. Si vous repèrez ce qui semble être une erreur d'énoncé, signalez le sur votre copie et poursuivez votre composition en expliquant les raisons des initiatives que vous avez été amené à prendre.*

**Consignes à respecter sous peine d'être pénalisé :**

- Utiliser des copies doubles.
- Changer de feuille/copie à chaque exercice ou partie d'un problème.
- Faire clairement apparaître le numéro (et le cas échéant la partie) de la question traitée.
- Souligner les résultats intermédiaires dans une démonstration à tiroirs.

- Faire une phrase de conclusion répondant clairement à la/les question(s) posées, et encadrer le résultat.

## Problème 1

Dans ce problème, pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ et tout couple $(\ell, k)$ d'entiers compris entre 1 et $p$, on note $M[\ell, k]$ le coefficient situé dans la $\ell$-ième ligne et la $k$-ième colonne de la matrice $M$.
On note $||M||_\infty = \max_{(\ell,k)\in[1,p]^2} |M[\ell, k]|$.
Ainsi, dans la base des matrices élémentaires $E_{\ell,k}$ (matrice dont tous les coefficients valent 0, sauf celui situé en place $(\ell, k)$, qui vaut 1), une matrice $M$ s'écrit $M = \sum_{\ell=1}^{p} \sum_{k=1}^{p} M[\ell, k]E_{\ell,k}$.
On note $\chi_M$ le polynôme caractéristique de $M$. On note $a_k(M)$ le coefficient de son monôme de degré $k$, de sorte que $\chi_M = \sum_{k=0}^{p} a_k(M)X^k$ avec $a_p(M) = 1$ et $a_0(M) = (-1)^p \det(M)$.
On note $Sp(M)$ le spectre complexe de $M$.

**1.** Soit $T$ une matrice triangulaire de $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$.
Pour tout entier strictement positif $n$ on pose : $T_n = T + \sum_{\ell=1}^{p} \dfrac{\ell}{n} E_{\ell,\ell}$.

- **a.** Calculer la limite, quand $n$ tend vers l'infini, de la différence $T_n[i, i]-T_n[k, k]$ de deux coefficients diagonaux de $T_n$.
- **b.** Démontrer qu'il existe un entier $N$ tel que, pour tout $n \geq N$, les coefficients diagonaux de $T_n$ soient deux à deux distincts.

**2.** En déduire que l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$
Pour tout polynôme $Q = \sum_{k=0}^{p} b_k X^k$ de $\mathbb{C}_p[X]$, on note $||Q||_1 = \sum_{k=0}^{p} |b_k|$.

**3.** Soit $M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ et $\mu \in Sp(M)$.

- **a.** Que vaut $\chi_M(\mu)$ ? En déduire successivement les inégalités :
$(I_1)$ : $|\mu|^p \leq \max\{1, |\mu|^{p-1}\} \sum_{k=0}^{p-1} |a_k(M)|$, $(I_2)$ : $\max\{1, |\mu|^p\} \leq \max\{1, |\mu|^{p-1}\} \sum_{k=0}^{p} |a_k(M)|$
et $(I_3)$ : $|\mu| \leq ||\chi_M||_1$.

**b.** En déduire que, pour toute matrice $N \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ telle que $||\chi_N - \chi_M||_1 \leq 1$, on a :

$$\forall \lambda \in Sp(N), |\lambda| \leq 2||\chi_M||_1.$$

**4.** Soit $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente de matrices de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, de limite $M$.
On admet qu'il existe un rang $N$ tel que

$$\forall n \geq N, ||\chi_{M_n} - \chi_M||_1 \leq 1.$$

On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le polynôme caractéristique de $M_n$ est scindé dans $\mathbb{R}[X]$, c'est à dire qu'il admet $p$ racines réelles $\lambda_{1,n}, \ldots, \lambda_{p,n}$ distinctes ou non :

$$\chi_{M_n} = \prod_{k=1}^{p}(X - \lambda_{k,n}).$$

**a.** Justifier l'existence d'une suite convergente extraite de la suite $((\lambda_{1,n}, \ldots, \lambda_{p,n}))_{n\in\mathbb{N}}$.

**b.** En déduire que le polynôme caractéristique de $M$ est scindé dans $\mathbb{R}[X]$.

**5.** Soit $\mathcal{D}_p(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices $M$ de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ qui sont diagonalisables dans $\mathbb{R}$.

**a.** Démontrer que l'adhérence de $\mathcal{D}_p(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ dont le spectre est inclus dans $\mathbb{R}$.

**b.** Montrer que si le polynôme caractéristique d'une matrice $M$ de $\mathcal{D}_p(\mathbb{R})$ n'est pas scindé à racines simples, alors il existe une suite de matrices non diagonalisables convergeant vers $M$.

# Problème 2

On note, pour $n$ entier tel que $n \geqslant 2$, $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre $n$ à coefficients réels. On s'intéresse dans ce problème, à travers divers exemples, à la réduction de matrices par blocs du type
$\begin{pmatrix} aA & bA \\ cA & dA \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $a, b, c, d$ sont quatre réels non tous nuls.
On rappelle qu'un produit de matrices par blocs se fait de manière similaire à un produit classique :

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AA' + BC' & AB' + BD' \\ CA' + DC' & CB' + DD' \end{pmatrix}$$

(chaque matrice bloc étant une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$).
On pourra utiliser sans démonstration que si $P \in GL_n(\mathbb{R})$, $A$ et $B$ sont deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $T$ est un polynôme, $A = P^{-1}BP \Rightarrow T(A) = P^{-1}T(B)P$.

On rappelle que si $A, B, C$ sont des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} = \det(A)\det(C)$.

## Questions préliminaires

L'objectif est de démontrer le résultat suivant : « une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ si et seulement s'il existe un polynôme $P$ scindé sur $\mathbb{R}$, à racines simples, vérifiant $P(M) = 0$ ».
Pour cela, on considère une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et on note $u$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à $M$.

**Q1.** On suppose que $u$ est diagonalisable et on note $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ ($p \geqslant 1$) les valeurs propres distinctes de $u$. Démontrer que le polynôme $P = (X - \lambda_1) \ldots (X - \lambda_p)$ est annulateur de $u$.

**Q2.** Réciproquement, on suppose que $\mu_1, \ldots, \mu_r$ sont $r$ nombres réels distincts ($r \geqslant 1$) tels que $Q = (X - \mu_1) \ldots (X - \mu_r)$ est un polynôme annulateur de $u$. En utilisant le lemme des noyaux, démontrer que $u$ est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ et que le spectre de $u$ est inclus dans l'ensemble $\{\mu_1, \ldots, \mu_r\}$.

## Un exemple où la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est diagonalisable sur $\mathbb{R}$

**Q3.** On suppose que $V = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$. Démontrer que $V$ est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ et donner une matrice inversible $P$ que l'on notera $P = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ et une matrice diagonale $D$ vérifiant $V = PDP^{-1}$ (on précisera $P^{-1}$).

**Q4.** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On pose alors la matrice par blocs $Q = \begin{pmatrix} \alpha I_n & \beta I_n \\ \gamma I_n & \delta I_n \end{pmatrix}$. Justifier que la matrice $Q$ est inversible, donner la matrice $Q^{-1}$ et démontrer que la matrice $\begin{pmatrix} 4A & 2A \\ -3A & -A \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ est semblable à la matrice $B = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 2A \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$.

**Q5.** On suppose que la matrice $A$ est diagonalisable sur $\mathbb{R}$, ce qui signifie qu'il existe une matrice $R$ inversible et une matrice $\Delta$ diagonale tells que $A = R\Delta R^{-1}$. Calculer le produit de matrices par blocs

$$\begin{pmatrix} R^{-1} & 0 \\ 0 & R^{-1} \end{pmatrix} B \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix}$$

Que peut-on en déduire pour la matrice $\begin{pmatrix} 4A & 2A \\ -3A & -A \end{pmatrix}$ ?

**Q6.** On se propose de démontrer la réciproque du résultat précédent. On suppose que la matrice $\begin{pmatrix} 4A & 2A \\ -3A & -A \end{pmatrix}$ est diagonalisable. Soit $T$ un polynôme scindé à racines simples annulateur de cette matrice, calculer $T(A)$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur la matrice $A$ pour que la matrice $\begin{pmatrix} 4A & 2A \\ -3A & -A \end{pmatrix}$ soit diagonalisable.

## Un exemple où la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est trigonalisable sur $\mathbb{R}$

**Q7.** Démontrer que la matrice $E = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ est trigonalisable sur $\mathbb{R}$ et donner une matrice inversible $P$ telle que $E = P \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$.

**Q8.** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, démontrer que la matrice $\begin{pmatrix} 3A & -2A \\ 2A & -A \end{pmatrix}$ est semblable à la matrice $F = \begin{pmatrix} A & -2A \\ 0 & A \end{pmatrix}$.

**Q9.** On suppose que la matrice $F$ est diagonalisable sur $\mathbb{R}$. Soit $U \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme annulateur de $F$, scindé sur $\mathbb{R}$ et à racines simples. On note $U'$ le polynôme dérivé de $U$.

Démontrer que $\begin{pmatrix} U(A) & -2AU'(A) \\ 0 & U(A) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ est la matrice nulle.

**Q10.** Vérifier que le polynôme minimal de la matrice $A$ est $X$. En déduire la valeur de la matrice $A$.

**Q11.** Donner une condition nécessaire et suffisante sur la matrice $A$ pour que la matrice $\begin{pmatrix} 3A & -2A \\ 2A & -A \end{pmatrix}$ soit diagonalisable.

**Q12.** On suppose que la matrice $F$ est trigonalisable sur $\mathbb{R}$. Exprimer le polynôme caractéristique de $F$ en fonction de celui de $A$. En déduire que $F$ est trigonalisable sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $A$ est trigonalisable sur $\mathbb{R}$.

**Q13.** Donner un exemple de matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que la matrice $\begin{pmatrix} 3A & -2A \\ 2A & -A \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ ne soit pas trigonalisable sur $\mathbb{R}$.

## Applications

**Q14.** Soit $u$ un endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique $(e_1, e_2, e_3, e_4)$ de $\mathbb{R}^4$ est

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 6 \\ 2 & 2 & 4 & 4 \\ 2 & 6 & 1 & 3 \\ 4 & 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Déterminer deux sous-espaces vectoriels de dimension 2 stables par $u$.
On pourra s'inspirer de la question **Q4**.

**Q15.** En adaptant la démarche présentée dans le premier exemple de ce problème, démontrer que la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

est diagonalisable sur $\mathbb{R}$. Déterminer une matrice diagonale $D$ et une matrice inversible $P$ telles que $M = PDP^{-1}$.

**Q16.** Utiliser la question **Q15** pour donner les solutions du système différentiel de fonctions inconnues $x_1, x_2, x_3, x_4$ de la variable réelle $t$ :

$$\begin{cases} x_1' = 4x_1 + 2x_3 \\ x_2' = 4x_2 + 2x_4 \\ x_3' = 2x_1 + 4x_3 \\ x_4' = 2x_2 + 4x_4 \end{cases}$$

(on ne demande pas de détails).

# Fin

# Un corrigé

## Problème

### Questions préliminaires

**Q.1** Par hypothèse, il existe une base de $\mathbb{R}^n$ dans laquelle $u$ est représenté par $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$ où les $d_i$ sont tous des valeurs propres de $u$ (il suffit de choisir une base de diagonalisation). $P(u)$ est alors représenté par $P(D) = \text{diag}(P(d_1), \dots, P(d_n))$. Chaque $d_i$ étant racine de $P$, on conclut que $P(D) = 0$ et donc que $P(u) = 0$.

$$\boxed{P = (X - \lambda_1)\dots(X - \lambda_p) \text{ est annulateur de } u}$$

**Q.2** Les $\mu_i$ étant deux à deux distincts, les polynômes $X - \mu_i$ sont premiers entre eux deux à deux. Par lemme des noyaux,

$$\ker(Q(u)) = \bigoplus_{i=1}^{r} \ker(u - \mu_i Id)$$

$Q$ annulant $u$, cet espace est égal à $\mathbb{R}^n$ tout entier. En ne conservant que les $\mu_i$ tels que $\ker(u - \mu_i Id) \neq \{0\}$ et en concaténant des bases de ces espaces, on obtient une base de $\mathbb{R}^n$ dans laquelle $u$ est représenté par une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux font tous partie des $\mu_i$. Ainsi,

$$\boxed{u \text{ est } \mathbb{R}\text{-diagonalisable et } \text{Sp}(u) \subset \{\mu_1, \dots, \mu_r\}}$$

### Un exemple où la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est diagonalisable sur $\mathbb{R}$

**Q.3** On a $\chi_V = X^2 - 3X + 2 = (X-1)(X-2)$ et les valeurs propres de $V$ sont donc 1 et 2. Il y a deux valeurs propres et on est en dimension 2 et ainsi $V$ est diagonalisable à sous-espaces propres de dimension 1. Comme $(2, -3)$ et $(1, -1)$ sont propres, ils engendrent chacun un sous-espace propre. On a

$$\boxed{V = PDP^{-1} \text{ avec } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},\ P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix},\ P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}}$$

**Q.4** En faisant un produit par bloc, on vérifie que $Q$ est inversible d'inverse

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} -I_n & -I_n \\ 3I_n & 2I_n \end{pmatrix}$$

(il suffit de vérifier que $QQ^{-1} = I_{2n}$). Un produit par blocs montre alors que

$$\boxed{Q^{-1} \begin{pmatrix} 4A & 2A \\ -3A & -A \end{pmatrix} Q = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 2A \end{pmatrix}}$$

ce qui donne la similitude voulue.

**Q.5** On obtient

$$\boxed{\begin{pmatrix} R^{-1} & 0 \\ 0 & R^{-1} \end{pmatrix} B \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R^{-1}AR & 0 \\ 0 & 2R^{-1}AR \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & 2\Delta \end{pmatrix}}$$

$A$ est semblable à $B$ elle même semblable à une matrice diagonale. Par transitivité de la relation de similitude,

$$\boxed{\begin{pmatrix} 4A & 2A \\ -3A & -A \end{pmatrix} \text{ est diagonalisable}}$$

**Q.6** On a vu que

$$\begin{pmatrix} 4A & 2A \\ -3A & -A \end{pmatrix} = QBQ^{-1}$$

Appliquons le polynôme $T$ qui annule la matrice de droite :

$$0 = QT(B)Q^{-1}$$

En multipliant par $Q^{-1}$ à gauche et $Q$ à droite, on conclut que $T(B) = 0$.
On montre par une récurrence immédiate que $B^k = \operatorname{diag}(A^k, (2A)^k)$ et en combinant linéairement, $T(B) = \operatorname{diag}(T(A), T(2A))$.
On en déduit alors que

$$\boxed{T(A) = 0}$$

Ainsi , $A$ est diagonalisable puisqu'elle est annulée par un polynôme scindé simple. Finalement,

$$\boxed{\begin{pmatrix} 4A & 2A \\ -3A & -A \end{pmatrix} \text{ est diagonalisable ssi } A \text{ l'est}}$$

## Un exemple où la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est trigonalisable sur $\mathbb{R}$

**Q.7** On note $f$ l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice $E$. On a

$$f(1,1) = (1,1) \quad \text{et} \quad f(-1,0) = (-3,-2) = -2(1,1) + (-1,0)$$

On peut alors obtenir la matrice de $f$ dans la base $((1,1),(-1,0))$ et on le traduit matriciellement par

$$\boxed{P^{-1}EP = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ avec } P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}$$

**Q.14** De manière similaire à précédemment, $Z = \begin{pmatrix} I_n & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$ est inversible d'inverse $Z^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & I_n \end{pmatrix}$ et un calcul par blocs donne

$$\boxed{Z^{-1}\begin{pmatrix} 3A & -2A \\ 2A & -A \end{pmatrix} Z = \begin{pmatrix} A & -2A \\ 0 & A \end{pmatrix}}$$

**Q.8** Montrons par récurrence que

$$F^k = \begin{pmatrix} A^k & -2kA^{k-1} \\ 0 & A^k \end{pmatrix}$$

- C'est vrai au rang $k = 0$ car $F^0 = I_{2n}$.
- Supposons le résultat vrai au rang $k$. Il suffit alors d'un calcul par bloc pour voir que cela reste vrai au rang $k+1$.

En notant $U = \sum_{k=0}^{d} u_k X^k$, on en déduit que

$$U(F) = \begin{pmatrix} U(A) & V(A) \\ 0 & U(A) \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad V(A) = -2\sum_{k=1}^{d} k u_k A^{k-1} = -2AU'(A)$$

Comme $U(F) = 0$, on en déduit que

$$\boxed{\begin{pmatrix} U(A) & -2AU'(A) \\ 0 & U(A) \end{pmatrix} = 0}$$

**Q.9** Ce qui précède montre que $U$ et $XU'$ annulent $A$ et sont donc multiples du polynôme minimal de $\mu_A$ de $A$ (l'ensemble des polynômes annulateurs étant l'idéal engendré par $\mu_A$). On en déduit que $\mu_A$ divise $U \wedge XU'$.
Or, $U$ étant scindé simple, $U$ et $U'$ sont premiers entre eux (aucun des diviseurs irréductible de $U$ ne divise $U'$) et donc $U \wedge XU' = U \wedge X$.
Ainsi, $\mu_A$ est un diviseur de $X$. Or $\deg(\mu_A) \geq 1$ (un polynôme constant non nul n'annule aucune matrice) et ainsi $\mu_A = X$ ($\mu_A$ est unitaire). Comme $\mu_A$ annule $A$, $A$ est nulle.

$$\boxed{\mu_A = X \text{ et } A = 0}$$

**Q.10** Si $\begin{pmatrix} 3A & -2A \\ 2A & -A \end{pmatrix}$ est diagonalisable alors $F$ (qui lui est semblable) l'est aussi. On vient alors de voir que $A = 0$.
Réciproquement, si $A = 0$ alors $\begin{pmatrix} 3A & -2A \\ 2A & -A \end{pmatrix}$ est nulle est donc diagonalisable.

$$\boxed{\begin{pmatrix} 3A & -2A \\ 2A & -A \end{pmatrix} \text{ est diagonalisable ssi } A = 0}$$

**Q.11** $\chi_F(\lambda) = \det(\lambda I_{2n} - F)$ est un déterminant bloc triangulaire. Avec la formule rappelée par l'énoncé,

$$\boxed{\chi_F = \chi_A^2}$$

Si $F$ est trigonalisable alors $\chi_F$ est scindé et tout diviseur de $\chi_F$ l'est donc aussi. Ainsi, $\chi_A$ est scindé et $A$ est trigonalisable.
Réciproquement, si $A$ est trigonalisable alors $\chi_A$ est scindé et donc $\chi_F$ aussi. $F$ est alors trigonalisable.

$$\boxed{F \text{ est trigonalisable sur } \mathbb{R} \text{ si et seulement si } A \text{ l'est}}$$

**Q.12** Soit $A = \text{diag}(M, 0)$ avec $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. On a alors $\chi_A = X^{n-2}(X^2+1)$ qui n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$ et $A$ n'est donc pas trigonalisable. Avec la question précédente, $F$ ne l'est pas.

## Applications

**Q.13** Si on pose $V = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, on a $M = \begin{pmatrix} A & 2A \\ 2A & A \end{pmatrix}$.
La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ est diagonalisable. On vérifie aisément que $(1,1)$ et $(1,-1)$ sont vecteurs propres. Comme en Q4, on vérifie que $Q = \begin{pmatrix} I_2 & I_2 \\ I_2 & -I_2 \end{pmatrix}$ est inversible d'inverse $Q^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} I_2 & I_2 \\ I_2 & -I_2 \end{pmatrix}$ et que

$$Q^{-1}MQ = \begin{pmatrix} 3V & 0 \\ 0 & -V \end{pmatrix}$$

Cette forme diagonale par bloc montre que les sous-espaces engendré par les 2 premiers (resp. 2 derniers) vecteurs de la nouvelle base (celle formée par les colonnes de $Q$) engendrent un espace stable par l'endomorphisme $u$.

$$\boxed{\text{Vect}((1,0,1,0),(0,1,0,1)) \text{ et Vect}((1,0,-1,0),(0,1,0,-1)) \text{ sont stables par } u}$$

**Q.14** On a cette fois $M = \begin{pmatrix} 4I_2 & 2I_2 \\ 2I_2 & 4I_2 \end{pmatrix}$. La matrice $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ est diagonalisable et on vérifie aisément que $(1,1)$ et $(1,-1)$ sont vecteurs propres (associés à 6 et 2). Comme en Q4, on vérifie que $P = \begin{pmatrix} I_2 & I_2 \\ I_2 & -I_2 \end{pmatrix}$ est inversible d'inverse $P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} I_2 & I_2 \\ I_2 & -I_2 \end{pmatrix}$ et que

$$P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 6I_2 & 0 \\ 0 & 2I_2 \end{pmatrix}$$

**Q.15** En notant $U = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$, le système s'écrit

$$U'(t) = MU(t)$$

Le cours nous apprend que l'ensemble des solutions est un espace vectoriel de dimension 4. Si $X$ est vecteur propre de $M$ associé à $\lambda$, on vérifie que $t \mapsto e^{\lambda t}X$ est une solution. La question précédente donne alors quatre solutions indépendantes qui forment une base de l'ensemble des solutions. La solution générale est ainsi

$$\boxed{t \mapsto c_1 e^{6t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 e^{6t}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_4 e^{2t}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}$$