CCP 2012 - MP - Maths 1

1. Soit f dans E. f est de classe C^1 sur $I=[0,1]$, donc $|f'|$ est continue sur I, et donc $\|f\|$ a bien un sens. De plus $\|f\|$ est positive.
* $\forall f,g \in E$, $\|f+g\| = |(f+g)(0)| + \int_0^1 |(f+g)'(t)|\,dt \leq |f(0)| + |g(0)| + \int_0^1 |f'(t)| + |g'(t)|\ dt = \|f\| + \|g\|$.
* $\forall f \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \|\lambda f\| = |\lambda f(0)| + \int_0^1 |(\lambda f)'(t)|\,dt = |\lambda|\,|f(0)| + |\lambda| \int_0^1 |f'(t)|\,dt = |\lambda|\,\|f\|$
* $\forall f \in E,\ \|f\| \geq 0$
* $\forall f \in E,\ \|f\| = 0 \Rightarrow |f(0)| = 0$ et $\int_0^1 |f'(t)|\,dt = 0$ car ces 2 nombres sont positifs et de somme nulle. Or $|f'|$ est continue et positive et d'intégrale nulle, donc $f'=0$, i.e. f est constante. Or $f(0)=0$, donc f est nulle.
$\|\ \|$ est bien une norme sur E.

2. (i.) N_1 et N_2 sont des normes équivalentes sur E si et seulement si

$$\exists a>0, \exists b>0 \text{ tq } \forall u \in E,\ aN_1(u) \leq N_2(u) \leq bN_1(u)$$

Attention : les constantes sont strictement positives.
(ii.) $\forall f \in E$, $\|f\| = |f(0)| + 2\int |f'| \leq 4\,|f(0)| + 2\int |f'| = 2\,\|f\|'$
De même $\|f\|' = 2\,|f(0)| + \int |f'| \leq 2\,|f(0)| + 4\int |f'| = 2\,\|f\|$ Et donc

$\boxed{\forall f \in E,\ \frac{1}{2}\|f\| \leq \|f\|' \leq 2\,\|f\|. \text{ Les normes sont équivalentes.}}$

3. Prenons la norme sur E définie par $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\,dt$, et considérons la suite (f_n) de fonctions de E définie par $\forall x \in \mathbb{R}, f_n(x) = x^n$.
$\|f_n\|_1 = \int_0^1 t^n dt = \dfrac{1}{n+1}$, qui converge vers 0 et $\|f_n\| = 0 + 2\int_0^1 f_n'(t)dt = 2(f_n(1) - f_n(0)) = 2$
Il n'existe donc pas de réel $a>0$ tel que $\forall f \in E,\ a\,\|f\| \leq \|f\|_1$, ces deux normes ne sont pas équivalentes.

CCP 2002 - PC - Maths 1

Partie 1

1. a. Une matrice est trigonalisable ssi elle est semblable à une matrice triangulaire (supérieure), c'est à dire il existe P inversible et T triangulaire telles que $M = PTP^{-1}$.
Attention aux nombreuses confusions entre matrices et endomorphisme : notamment, parler de bases ou de changement de bases n'a aucun sens pour des matrices.

b. $M \in M_{n+1}(\mathbf{C})$. Notons $P_M = \det(xI_{n+1} - M)$ le polynôme caractéristique de M et $u \in L(\mathbf{C}^{n+1})$ de matrice M dans la base canonique . χ_M est de degré $n+1 \geq 1$, donc NON CONSTANT. D'après le théorème de d'Alembert-Gauss, χ_M admet au moins une racine sur C , donc M admet au moins une valeur propre λ .
On peut parler de corps algébriquement clos, mais ne pas oublier de préciser que le polynôme est **non constant** *!*

c. Soit alors V_1 un vecteur propre associé à λ . D'après le théorème de la base incomplète , il existe $V_2, ..., V_{n+1}$ tels que $B' = (V_1, V_2, ..., V_{n+1})$ soit une base de $\mathbf{C}^{n+1}$. Soit Q la matrice de passage de la base canonique à la base B' et $M' = mat_{B'}(u)$. On a : $u(V_1) = \lambda V_1$ donc $M' = \begin{pmatrix} \lambda & m'_{1,2} & \cdots & m'_{1,n+1} \\ 0 & m'_{2,2} & \cdots & m'_{2,n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & m'_{n+1,2} & \cdots & m'_{n+1,n+1} \end{pmatrix}$ Notons $N = \begin{pmatrix} m'_{2,2} & \cdots & m'_{2,n+1} \\ \vdots & & \vdots \\ m'_{n+1,2} & \cdots & m'_{n+1,n+1} \end{pmatrix}$, $N \in M_n(\mathbf{C})$ et $L = (m'_{1,2}, ..., m'_{1,n+1})$, $L \in M_{1,n}(\mathbf{C})$: $\boxed{M' = Q^{-1}MQ = \begin{pmatrix} \lambda & L \\ 0_{n,1} & N \end{pmatrix}}$

d. D'après l'hypothèse faite au début de la question , N est trigonalisable , donc : $\exists H \in GL_n(\mathbf{C})$ tq $S = H^{-1}NH$ soit triangulaire supérieure . On a : $N = HSH^{-1}$ et $S \in T_n(\mathbf{C})$

e. On pose $R' = \begin{pmatrix} 1 & 0_{1,n} \\ 0_{n,1} & H^{-1} \end{pmatrix}$. Par produit matriciel par blocs, $R'R = I_{n+1}$, donc : $R \in GL_{n+1}(\mathbf{C})$ et $R^{-1} = R'$.

Si on devine la forme de R^{-1}, il est inutile de parler de déterminant...

f. Soit $M'' = R^{-1}M'R$. Posons $P = QR$: $M'' = P^{-1}MP = \begin{pmatrix} \lambda & LH \\ 0_{n,1} & S \end{pmatrix}$; S est triangulaire supérieure donc M'' aussi . En conclusion : $\underline{M \text{ est trigonalisable}}$.

2. Si $n = 1$: toute matrice $M \in M_1(\mathbf{C})$ est triangulaire , donc trigonalisable .
D'après 1) , si toute matrice $M \in M_n(\mathbf{C})$ est trigonalisable , alors toute matrice $M \in M_{n+1}(\mathbf{C})$ est trigonalisable . On peut conclure à l'aide du principe de récurrence que :
<u>toute matrice carrée complexe est trigonalisable</u>

3. **a.** $\chi_G(x) = \det(xI_3 - G) = (x-1)^3$; 1 est valeur propre d'ordre 3 et $G \neq I_3$ donc $\dim[\ker(G - I_3)] \neq 3$ donc $\underline{G \text{ n'est pas diagonalisable}}$.

b. $rg(G - I_3) = 2$ donc $\dim[\ker(G - I_3)] = 1$, $\boxed{u = e_1 - e_3}$ engendre $\ker(G - I_3)$ et tout autre vecteur propre est de la forme αu donc de première composante $\alpha \neq 1$.
$\det(u, e_2, e_3) = 1$ donc $B' = (u, e_2, e_3)$ est une base de $\mathbf{C}^3$.

c. $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $Q^{-1}GQ = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 3 \end{pmatrix}$. $L = (1, 0)$ et $N = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$. 1 est valeur propre double de N et $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ est vecteur propre associé . Soit $H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$; $S = H^{-1}NH = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $LH = (1, 0)$; $\boxed{P = QR = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} ; P^{-1}GP = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$

Dommage de ne pas mener les calculs jusqu'au bout : toute la méthode est exposée en début de partie.

4. Deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique ; les valeurs propres d'une matrice triangulaire sont les termes de la diagonale . Donc si $A \in M_n(\mathbf{C})$ est semblable à $T \in T_n(\mathbf{C})$, alors $\underline{\text{les termes diagonaux de } T \text{ sont les valeurs propres de } A}$

5. **a.** Par hypothèse : $j < i \Rightarrow s_{i,j} = t_{i,j} = 0$. Soit $U = ST = (u_{i,j})$: $u_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} s_{i,k}t_{k,j}$. Si $i > j$ alors pour $k < i$: $s_{i,k} = 0$ et pour $k \geq i$, $k > j \Rightarrow t_{k,j} = 0$ donc $u_{i,j} = 0$.
Donc $ST \in T_n(\mathbf{C})$. Enfin si $i = j$ seul $k = i$ donne un terme non nul : $\underline{u_{i,i} = s_{i,i}t_{i,i}}$
Il faut détailler les calculs.

b. On prend $S = T$: $T^2 \in T_n(\mathbf{C})$, de t. diagonaux $(t_{i,i})^2$. Par récurrence : si $T^p \in T_n(\mathbf{C})$, de t. diagonaux $(t_{i,i})^p$, on prend $S = T^p$ d'où $T^{p+1} \in T_n(\mathbf{C})$, de t. diagonaux $(t_{i,i})^{p+1}$.

6. Soit $A \in M_n(\mathbf{C})$. D'après 2) , $\exists T \in T_n(\mathbf{C})$, $\exists P \in GL_n(\mathbf{C})$ *tq* $T = P^{-1}AP$. D'après 4) , les termes diagonaux $t_{1,1}, ..., t_{n,n}$ de T sont les valeurs propres $\lambda_1, ..., \lambda_n$ de A . D'après 5) , les termes diagonaux de T^k sont $(\lambda_1)^k, ..., (\lambda_n)^k$; d'après 4) et $T^k = P^{-1}A^kP$, ce sont les valeurs propres de A^k . Donc $\rho(A^k) = \max\left\{\left|(\lambda_i)^k\right| , 1 \leq i \leq n\right\} = (\max\{|\lambda_i| , 1 \leq i \leq n\})^k$

Conclusion : $\boxed{\rho(A^k) = [\rho(A)]^k}$

7. $\forall A \in M_n(\mathbf{C})$, $\psi(A)$ existe et $\psi(A) \geq 0$; $\psi(A) = 0 \Leftrightarrow A = 0_n$; $\forall A \in M_n(\mathbf{C}), \forall \lambda \in \mathbf{C}$, $\psi(\lambda A) = |\lambda| \psi(A)$; $\forall A, B \in M_n(\mathbf{C})$, $\psi(A + B) \leq \psi(A) + \psi(B)$: $\underline{\psi \text{ est une norme sur } M_n(\mathbf{C})}$
Soit $U \in M_n(\mathbf{C})$ tq $\forall i, j$, $u_{i,j} = 1$: $\psi(U) = 1$, $U^2 = nU$ donc $\psi(U^2) = n$ et $\underline{\text{si } n \geq 2}$ l'inégalité : $\psi(U \times U) \leq \psi(U) \times \psi(U)$ n'est pas vérifiée , donc $\underline{\psi \text{ n'est pas une norme matricielle}}$

8. La norme N et une norme matricielle φ sont équivalentes car $M_n(\mathbf{C})$ est un EV de dim finie . Par définition : $\exists\alpha\,,\ \beta > 0\ tq\ \forall A \in M_n(\mathbf{C})\ ,\ \alpha\varphi(A) \leq N(A) \leq \beta\varphi(A)$
Attention, les constantes sont strictement positives !
Alors $\forall A, B \in M_n(\mathbf{C})\ ,\ N(AB) \leq \beta\varphi(AB) \leq \beta\varphi(A)\varphi(B) \leq \frac{\beta}{\alpha^2}N(A)N(B)$

9. Soit $\forall k\ ,\ B_k = P^{-1}A_kP$ et $B = P^{-1}AP$. $\forall k\ ,\ B_k - B = P^{-1}(A_k - A)P$
Soit N une norme matricielle : $0 \leq N(B_k - B) \leq N(P^{-1})N(A_k - A)N(P)$ d'où : $N(A_k - A) \to 0\ qd\ k \to +\infty \Rightarrow N(B_k - B) \to 0\ qd\ k \to +\infty$
Réciproque : si (B_k) CV vers B , alors $\left(PB_kP^{-1}\right)$ CV vers PBP^{-1} d'où (A_k) CV vers A

10. **a.** $\forall k \in \mathbf{N}^*\,,\ T^k = \begin{pmatrix} \lambda^k & k\lambda^{k-1}\mu \\ 0 & \lambda^k \end{pmatrix}$. A_k de terme général $a_{i,j}^{(k)}$ CV vers A si et seulement si $\forall i, j\ ,\ a_{i,j}^{(k)} \to a_{i,j}\ qd\ k \to +\infty$. Donc la suite $\left(T^k\right)$ CV ssi les suites complexes $\left(\lambda^k\right)$ et $\left(k\lambda^{k-1}\mu\right)$ CV ; ssi $\boxed{[|\lambda| < 1 \text{ (la limite est alors } 0_2)] \text{ ou } \left[\lambda = 1 \text{ et } \mu = 0\ (\forall k\,,\ T^k = I_2)\right]}$

b. $\exists P \in GL_2(\mathbf{C})$ tq $P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$. Alors $D^k = \begin{pmatrix} (\lambda_1)^k & 0 \\ 0 & (\lambda_2)^k \end{pmatrix}$. D'après 9) $\left(A^k\right)$ CV ssi $\left(D^k\right)$ CV . Les cas de CV sont : $\left\{\begin{array}{c} |\lambda_i| < 1 \text{ pour } i = 1 \text{ et } 2 \text{ (limite } 0_2) \\ \lambda_i = 1 \text{ et } |\lambda_j| < 1 \text{ pour } i \neq j \\ \lambda_1 = \lambda_2 = 1 \end{array}\right.$

c. Si A n'est pas diagonalisable , nécéssairement ses valeurs propres sont égales . D'après 2) elle est trigonalisable : $\exists P \in GL_2(\mathbf{C})$ tq $P^{-1}AP = T = \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ et $\mu \neq 0$ (sinon A serait diagonalisable) . Donc d'après a) , la suite $\left(T^k\right)$ CV ssi $|\lambda| < 1$ et d'après 9) , $\left(A^k\right)$ CV ssi $\left(T^k\right)$ CV . Ici $\rho(A) = |\lambda|$. Donc $\underline{\left(A^k\right) \text{ CV ssi } \rho(A) < 1 \text{ et la limite est } 0_2}$

d. D'après b) , si A est diagonalisable : $\left(A^k\right)$ CV vers 0_2 ssi $(|\lambda_1| < 1$ et $|\lambda_1| < 1)$, ssi $\rho(A) < 1$. En conclusion de b) et c) : $\boxed{\left(A^k\right) \text{ CV vers } 0_2 \text{ ssi } \rho(A) < 1}$

$\boxed{\text{Partie 2}}$

1) a) Posons $Y = AX$: $\forall i, y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j$. $\forall j\,,\ |x_j| \leq N_\infty(X) \Rightarrow |y_i| \leq \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|\right) N_\infty(X) \leq M_A N_\infty(X)$ donc $N_\infty(AX) \leq M_A N_\infty(X)$
b) $\mathbf{C}^n$ est un EV de dim finie donc toute norme N sur $\mathbf{C}^n$ est équivalente à la norme N_∞ : $\exists\alpha\,,\ \beta > 0\ tq\ \forall X \in \mathbf{C}^n\ ,\ \alpha N_\infty(X) \leq N(X) \leq \beta N_\infty(X)$
$N(AX) \leq \beta N_\infty(AX) \leq \beta M_A N_\infty(X) \leq \beta M_A \frac{1}{\alpha}N(X) \leq C_A N(X)$ en posant $C_A = \frac{\beta}{\alpha}M_A$
c) $\forall X \neq 0\ ,\ \frac{N(AX)}{N(X)} \leq C_A$. L'ensemble $\left\{\frac{N(AX)}{N(X)}\ ,\ X \in \mathbf{C}^n - \{0\}\right\}$ est une partie non vide et majorée de $\mathbf{R}$ donc admet une borne supérieure .
d) Cette borne sup est le plus petit majorant et C_A est un majorant donc $\widetilde{N}(A) \leq C_A$. Dans le cas de la norme N_∞ , on peut prendre $C_A = M_A$ donc : $\boxed{\widetilde{N}_\infty(A) \leq M_A}$.
e) $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow GX_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 10 \end{pmatrix}$. On a : $N_\infty(X_0) = 1\,, N_\infty(GX_0) = 10$ d'où $\frac{N_\infty(GX_0)}{N_\infty(X_0)} = 10 \Rightarrow \widetilde{N}_\infty(G) \geq 10$. De plus $M_G = 10$ donc $\widetilde{N}_\infty(G) \leq 10$. Conclusion : $\boxed{\widetilde{N}_\infty(G) = M_G = 10}$
2) $\forall j\,,\ |y_j| = 1 \Rightarrow N_\infty(Y) = 1$. Soit $Z = AY$. $\forall i\,,\ |z_i| = \left|\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}y_j\right| \leq \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| \leq M_A$
Si $a_{i_0j} = 0$ alors $a_{i_0,j}y_j = 0 = |a_{i_0,j}|$, sinon $a_{i_0,j}y_j = |a_{i_0,j}|$ car $\forall u \in \mathbf{C}^*\,,\ u\frac{\overline{u}}{|u|} = |u|$. Donc $z_{i_0} = \sum_{j=1}^{n} |a_{i_0,j}| = M_A$. $N_\infty(Z) = M_A \Rightarrow \frac{N_\infty(AY)}{N_\infty(Y)} = M_A \Rightarrow \boxed{\widetilde{N}_\infty(A) \geq M_A}$. En utilisant 1)d) on peut conclure : $\boxed{\widetilde{N}_\infty(A) = M_A}$

3) a) $\widetilde{N}(A)=0 \Leftrightarrow \forall X \neq 0\,,\ N(AX)=0 \Leftrightarrow \forall X \neq 0\,,\ AX=0 \Leftrightarrow \forall X\ ,\ AX=0 \Leftrightarrow A=0_n$
b) $\forall X \neq 0\,,\ \frac{N(\lambda AX)}{N(X)}=\frac{|\lambda| N(AX)}{N(X)} \leq |\lambda|\,\widetilde{N}(A)$ donc $\widetilde{N}(\lambda A) \leq |\lambda|\,\widetilde{N}(A)$
c) Si $\lambda \neq 0$: $\widetilde{N}(A)=\widetilde{N}(\frac{1}{\lambda}\lambda A) \leq \left|\frac{1}{\lambda}\right| \widetilde{N}(\lambda A) \Rightarrow |\lambda|\,\widetilde{N}(A) \leq \widetilde{N}(\lambda A)$ d'où $|\lambda|\,\widetilde{N}(A)=\widetilde{N}(\lambda A)$
Si $\lambda=0$ on a égalité car les 2 membres sont nuls .
d) $\forall X \neq 0\,,\ N[(A+B)X]=N(AX+BX) \leq N(AX)+N(BX) \Rightarrow \frac{N[(A+B)X]}{N(X)} \leq \frac{N(AX)}{N(X)}+\frac{N(BX)}{N(X)} \leq \widetilde{N}(A)+\ \widetilde{N}(B)$ donc $\widetilde{N}(A+B) \leq \widetilde{N}(A)+\ \widetilde{N}(B)$
e) $\forall X \neq 0\,,\ \frac{N(AX)}{N(X)} \leq \widetilde{N}(A) \Rightarrow N(AX) \leq \widetilde{N}(A) N(X)$ et si $X=0$ les 2 membres sont nuls .
f) On déduit de a),c),d) que $\widetilde{N}$ est une norme sur $M_n(\mathbf{C})$. De plus : $\forall A, B \in M_n(\mathbf{C})$, $\forall X \in \mathbf{C}^n$, $N(ABX) \leq \widetilde{N}(A) N(BX) \leq \widetilde{N}(A) \widetilde{N}(B) N(X)$ d'où : $\widetilde{N}(AB) \leq \widetilde{N}(A) \widetilde{N}(B)$
Conclusion : $\boxed{\widetilde{N} \text{ est une norme matricielle sur } M_n(\mathbf{C})}$ (ce qui en prouve l'existence)
4)a) Soit $\lambda \in Sp(A)$ et X un vecteur propre associé : $X \neq 0$ et $AX=\lambda X \Rightarrow \frac{N(AX)}{N(X)}=|\lambda|$ donc $|\lambda| \leq \widetilde{N}(A)$. En particulier pour λ telle que $|\lambda|=\rho(A)$. Donc $\boxed{\rho(A) \leq \widetilde{N}(A)}$
b) Si $A=I_n$: $\rho(A)=1$ et $\forall X\ ,\ AX=X$ donc $\widetilde{N}(A)=1$: on a égalité .
c) Si $A \neq 0_n$ alors $\widetilde{N}(A) \neq 0$ d'après 3)a) . Si de plus A est nilpotente , sa seule valeur propre est 0 donc $\rho(A)=0$ et : $\rho(A)<\widetilde{N}(A)$
5) Si $\left(A^k\right)$ converge vers 0_n alors $\widetilde{N}(A^k) \rightarrow 0\ qd\ k \rightarrow +\infty$. $[\rho(A)]^k=\rho(A^k) \leq \widetilde{N}(A^k)$ donc $[\rho(A)]^k \rightarrow 0\ qd\ k \rightarrow +\infty$. D'où : $\boxed{\rho(A)<1}$. (Réciproque admise)
6) a) De l'inégalité vue en 5) on déduit pour $k \in \mathbf{N}^*$: $\rho(A) \leq \left[\widetilde{N}(A^k)\right]^{\frac{1}{k}}$
b) $\lambda \in Sp(A) \Leftrightarrow \alpha\lambda \in Sp(\alpha A)$ donc $\rho(\alpha A)=|\alpha|\,\rho(A)$
c) On prend $\alpha=\frac{1}{\rho(A)+\varepsilon}$ $(\alpha>0)$ et on applique a) : $\rho(A_\varepsilon)=\alpha\rho(A)=\frac{\rho(A)}{\rho(A)+\varepsilon}<1$ car $\varepsilon>0$
D'après le résultat admis de 5) , $(A_\varepsilon)^k$ CV vers 0 donc $\exists k_\varepsilon$ tq $\forall k \geq k_\varepsilon$, $\widetilde{N}\left((A_\varepsilon)^k\right) \leq 1$. $(A_\varepsilon)^k=\alpha^k A^k \Rightarrow \widetilde{N}\left((A_\varepsilon)^k\right)=\alpha^k \widetilde{N}(A^k)$ Donc $\alpha^k \widetilde{N}(A^k) \leq 1 \Rightarrow \widetilde{N}(A^k) \leq (\rho(A)+\varepsilon)^k$.

d) $\forall k \geq k_\varepsilon$, $\rho(A) \leq \left[\widetilde{N}(A^k)\right]^{\frac{1}{k}} \leq \rho(A)+\varepsilon$: c'est la définition de : $\lim\limits_{k \rightarrow +\infty} \left[\widetilde{N}(A^k)\right]^{\frac{1}{k}}=\rho(A)$