

### Notations et objectifs.

Dans tout ce problème,  $n$  est un entier naturel supérieur ou égal à 2 et  $E$  est un espace vectoriel de dimension finie  $n$  sur le corps  $\mathbb{R}$  des nombres réels.

$\mathcal{L}(E)$  désigne l'algèbre des endomorphismes de  $E$  et  $GL(E)$  l'ensemble des endomorphismes de  $E$  qui sont bijectifs.

On note  $0$  l'endomorphisme nul et  $\text{id}$  l'application identité.

Pour tout endomorphisme  $f$ ,  $\text{Ker}(f)$  et  $\text{Im}(f)$  désigneront respectivement le noyau et l'image de  $f$ .

L'ensemble des valeurs propres de  $f$  sera noté  $\text{Sp}(f)$  et on notera :

$$\mathcal{R}(f) = \{h \in \mathcal{L}(E) \mid h^2 = f\}.$$

$\mathbb{R}[X]$  désigne l'espace des polynômes à coefficients réels.

Etant donné  $f \in \mathcal{L}(E)$  et  $P \in \mathbb{R}[X]$  donné par  $P(X) = \sum_{k=0}^{\ell} a_k X^k$ , on définit  $P(f) \in \mathcal{L}(E)$  par :

$$P(f) = \sum_{k=0}^{\ell} a_k f^k$$

où  $f^0 = \text{id}$  et pour  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $f^k = \underbrace{f \circ \dots \circ f}_{k \text{ fois}}$ .

Si  $f_1, \dots, f_q$  désignent  $q$  endomorphismes de  $E$  ( $q \in \mathbb{N}^*$ ) alors  $\prod_{1 \leq i \leq q} f_i$  désignera l'endomorphisme  $f_1 \circ \dots \circ f_q$ .

Pour tout entier  $p$  non nul,  $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$  désigne l'espace des matrices carrées à  $p$  lignes et  $p$  colonnes à coefficients dans  $\mathbb{R}$ .

$I_p$  est la matrice identité de  $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ .

L'objectif du problème est d'étudier des conditions nécessaires ou suffisantes à l'existence de racines carrées d'un endomorphisme  $f$  et de décrire dans certains cas l'ensemble  $\mathcal{R}(f)$ .

### Partie I

A) On désigne par  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  dont la matrice dans la base canonique est donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 4 & -7 \\ -8 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que  $f$  est diagonalisable.
2. Déterminer une base  $(v_1, v_2, v_3)$  de  $\mathbb{R}^3$  formée de vecteurs propres de  $f$  et donner la matrice  $D$  de  $f$  dans cette nouvelle base.
3. Soit  $P$  la matrice de passage de la base canonique à la base  $(v_1, v_2, v_3)$ . Soit un entier  $m \geq 1$ . Sans calculer l'inverse de  $P$ , exprimer  $A^m$  en fonction de  $D$ ,  $P$  et  $P^{-1}$ .

4. Calculer  $P^{-1}$ , puis déterminer la matrice de  $f^m$  dans la base canonique.
5. Déterminer soigneusement toutes les matrices de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  qui commutent avec la matrice  $D$  trouvée à la question 2).
6. Montrer que si  $H \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  vérifie  $H^2 = D$ , alors  $H$  et  $D$  commutent.
7. Dédire de ce qui précède toutes les matrices  $H$  de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  vérifiant  $H^2 = D$ , puis déterminer tous les endomorphismes  $h$  de  $\mathbb{R}^3$  vérifiant  $h^2 = f$  en donnant leur matrice dans la base canonique.

**B)** Soient  $f$  et  $j$  les endomorphismes de  $\mathbb{R}^3$  dont les matrices respectives  $A$  et  $J$  dans la base canonique sont données par :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer  $J^m$  pour tout entier  $m \geq 1$ .
2. En déduire que pour tout  $m \in \mathbb{N}^*$ ,  $f^m = \text{id} + \frac{1}{3}(4^m - 1)j$ . Cette relation est-elle encore valable pour  $m = 0$ ?
3. Montrer que  $f$  admet deux valeurs propres distinctes  $\lambda$  et  $\mu$  telles que  $\lambda < \mu$ .
4. Montrer qu'il existe un unique couple  $(p, q)$  d'endomorphismes de  $\mathbb{R}^3$  tel que pour tout entier  $m \geq 0$ ,  $f^m = \lambda^m p + \mu^m q$  et montrer que ces endomorphismes  $p$  et  $q$  sont linéairement indépendants.
5. Après avoir calculé  $p^2$ ,  $q^2$ ,  $p \circ q$  et  $q \circ p$ , trouver tous les endomorphismes  $h$ , combinaisons linéaires de  $p$  et  $q$  qui vérifient  $h^2 = f$ .
6. Montrer que  $f$  est diagonalisable et trouver une base de vecteurs propres de  $f$ . Ecrire la matrice  $D$  de  $f$ , puis la matrice de  $p$  et de  $q$  dans cette nouvelle base.
7. Déterminer une matrice  $K$  de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  non diagonale telle que  $K^2 = I_2$ , puis une matrice  $Y$  de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  non diagonale telle que  $Y^2 = D$ .
8. En déduire qu'il existe un endomorphisme  $h$  de  $\mathbb{R}^3$  vérifiant  $h^2 = f$  qui n'est pas combinaison linéaire de  $p$  et  $q$ .
9. Montrer que tous les endomorphismes  $h$  de  $\mathbb{R}^3$  vérifiant  $h^2 = f$  sont diagonalisables.

## Partie II

Soit  $f$  un endomorphisme de  $E$ . On suppose qu'il existe  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$  et deux endomorphismes non nuls  $p$  et  $q$  de  $E$  tels que :

$$\lambda \neq \mu \text{ et } \begin{cases} \text{id} = p + q \\ f = \lambda p + \mu q \\ f^2 = \lambda^2 p + \mu^2 q. \end{cases}$$

1. Calculer  $(f - \lambda \text{id}) \circ (f - \mu \text{id})$ . En déduire que  $f$  est diagonalisable.
2. Montrer que  $\lambda$  et  $\mu$  sont valeurs propres de  $f$  et qu'il n'y en a pas d'autres.
3. Dédire de la relation trouvée dans la question 1) que  $p \circ q = q \circ p = 0$  puis montrer que  $p^2 = p$  et  $q^2 = q$ .
4. On suppose jusqu'à la fin de cette partie que  $\lambda\mu \neq 0$ .  
Montrer que  $f$  est un isomorphisme et écrire  $f^{-1}$  comme combinaison linéaire de  $p$  et  $q$ .

5. Montrer que pour tout  $m \in \mathbb{Z}$  :

$$f^m = \lambda^m p + \mu^m q.$$

6. Soit  $F$  le sous-espace de  $\mathcal{L}(E)$  engendré par  $p$  et  $q$ . Déterminer la dimension de  $F$ .

7. On suppose dans la suite de cette partie que  $\lambda$  et  $\mu$  sont strictement positifs. Déterminer  $\mathcal{R}(f) \cap F$ .

8. Soit  $k$  un entier supérieur ou égal à 2. Déterminer une matrice  $K$  de  $\mathcal{M}_k(\mathbb{R})$  non diagonale et vérifiant  $K^2 = I_k$ .

9. Montrer que si l'ordre de multiplicité de la valeur propre  $\lambda$  est supérieur ou égal à 2, alors il existe un endomorphisme  $p' \in \mathcal{L}(E) \setminus F$  tel que  $p'^2 = p$  et  $p' \circ q = q \circ p' = 0$ .

10. En déduire que si  $\dim(E) \geq 3$ , alors  $\mathcal{R}(f) \not\subset F$ .

### Partie III

Soient  $p_1, \dots, p_m$ ,  $m$  endomorphismes non nuls de  $E$  et  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ ,  $m$  nombres réels distincts. Soit  $f$  un endomorphisme de  $E$  vérifiant pour tout entier  $k \in \mathbb{N}$  :

$$f^k = \sum_{i=1}^m \lambda_i^k p_i.$$

1. Montrer que pour tout  $P \in \mathbb{R}[X]$ , on a :

$$P(f) = \sum_{i=1}^m P(\lambda_i) p_i.$$

2. En déduire que  $\prod_{i=1}^m (f - \lambda_i \text{id}) = 0$ , puis que  $f$  est diagonalisable.

3. Pour tout entier  $\ell$  tel que  $1 \leq \ell \leq m$ , on considère le polynôme :

$$L_\ell(X) = \prod_{\substack{1 \leq i \leq m \\ i \neq \ell}} \frac{(X - \lambda_i)}{(\lambda_\ell - \lambda_i)}.$$

Montrer que pour tout entier  $\ell$ , tel que  $1 \leq \ell \leq m$ , on a  $p_\ell = L_\ell(f)$ .

En déduire que  $\text{Im}(p_\ell) \subset \text{Ker}(f - \lambda_\ell \text{id})$ , puis que le spectre de  $f$  est :

$$\text{Sp}(f) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}.$$

4. Vérifier que pour tout couple d'entiers  $(i, j)$  tels que  $1 \leq i, j \leq m$ , on a :

$$p_i \circ p_j = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ p_i & \text{si } i = j. \end{cases}$$

5. Justifier le fait que la somme  $\sum_{i=1}^m \text{Ker}(f - \lambda_i \text{id})$  est directe et égale à  $E$  et que les projecteurs associés à cette décomposition de  $E$  sont les  $p_i$ .

6. Soit  $F$  le sous-espace vectoriel de  $\mathcal{L}(E)$  engendré par  $\{p_1, \dots, p_m\}$ . Déterminer la dimension de  $F$ .

7. Déterminer  $\mathcal{R}(f) \cap F$  dans le cas où  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  sont des réels positifs ou nuls.

8. Dans cette question, on suppose de plus que  $m = n$ .
  - a. Préciser alors la dimension des sous-espaces propres de  $f$ .
  - b. Montrer que si  $h \in \mathcal{R}(f)$ , tout vecteur propre de  $f$  est également vecteur propre de  $h$ .
  - c. En déduire que  $\mathcal{R}(f) \subset F$  et donner une condition nécessaire et suffisante sur les  $\lambda_i$  pour que  $\mathcal{R}(f)$  soit non vide.
9. Montrer que si  $m < n$  et si tous les  $\lambda_i$  sont positifs ou nuls, alors  $\mathcal{R}(f) \not\subset F$ .

### Partie IV

- A)** Soit  $f$  un endomorphisme non nul de  $E$  tel qu'il existe un entier  $p > 1$  tel que  $f^p = 0$  et  $f^{p-1} \neq 0$ .
1. Montrer qu'il existe  $x \in E$  non nul tel que la famille  $(x, f(x), f^2(x), \dots, f^{p-1}(x))$  est libre. En déduire que  $p \leq n$  et que  $f^n = 0$ .
  2. Montrer que si  $\mathcal{R}(f) \neq \emptyset$ , alors  $2p - 1 \leq n$ .
  3. Déterminer les réels  $a_0, \dots, a_{n-1}$  tels que  $\sqrt{1+x} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k + O(x^n)$  au voisinage de 0. Dans la suite,  $P_n$  désigne le polynôme défini par  $P_n(X) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$ .
  4. Montrer qu'il existe une fonction  $\eta$  bornée au voisinage de 0 telle que l'on ait  $P_n^2(x) - x - 1 = x^n \eta(x)$ . En déduire que  $X^n$  divise  $P_n^2 - X - 1$ .
  5. Montrer alors que  $\mathcal{R}(f + \text{id}) \neq \emptyset$ .  
Plus généralement, montrer que pour tout réel  $\alpha$  réel,  $\mathcal{R}(\alpha f + \text{id}) \neq \emptyset$ , puis que pour tout  $\beta$  réel strictement positif,  $\mathcal{R}(f + \beta \text{id}) \neq \emptyset$ .
- B)**
1. Soit  $T = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$  une matrice triangulaire supérieure de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  dont tous les coefficients diagonaux sont égaux à un réel  $\lambda$ .  
Montrer que  $(T - \lambda I_n)^n = 0$ .
  2. On suppose dans toute la suite que  $f$  est un endomorphisme de  $E$  dont le polynôme caractéristique est scindé et qui n'admet qu'une seule valeur propre  $\lambda$ . Déduire de la question précédente que  $E = \text{Ker}(f - \lambda \text{id})^n$ .
  3. Montrer que si  $\lambda > 0$  alors  $\mathcal{R}(f) \neq \emptyset$ .