# DS 3 : 4h

Vendredi 10 novembre 2017
L'usage des calculatrices n'est pas autorisé

**Consignes à respecter sous peine d'être pénalisé :**
• Changer de copie (ou au moins de feuille) à chaque exercice ou partie d'un problème.
• Numéroter les questions (et le cas échéant la partie).
• Souligner les résultats intermédiaires dans une démonstration à tiroirs, faire une phrase de conclusion et encadrer le résultat.

## Questions de cours :

**1.** Énoncer puis démontrer le théorème de Lagrange pour un groupe commutatif.

**2.** Montrer que les sous espaces propres d'un endomorphisme sont en somme directe.

**3.** Énoncer un maximum de conditions suffisantes pour qu'une matrice carrée $M$ soit diagonalisable et préciser lorsqu'elles sont nécessaires.

**4.** Énoncer le lemme des noyaux (on ne demande pas de démonstration).

**5.** Montrer que la boule unité fermée d'un espace vectoriel normé est convexe.

**6.** Montrer qu'une suite vectorielle convergente est bornée.

## Exercice :

Soient $A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $P_n(x) = \det(xI_n - A_n)$

**1.** Montrer $P_n(x) = xP_{n-1}(x) - P_{n-2}(x)$ et calculer $P_1(x)$ et $P_2(x)$.

**2.** Pour tout $x \in ]-2\,;2[$, on pose $x = 2\cos(\alpha)$ avec $\alpha \in ]0\,;\pi[$. Montrer que $P_n(x) = \dfrac{\sin((n+1)\alpha)}{\sin(\alpha)}$

**3.** En déduire que $P_n(x)$ admet $n$ racines puis que $A_n$ est diagonalisable.

## Exercice :

On note $E$ l'espace vectoriel des applications de classe $\mathcal{C}^1$ définies sur $[0;1]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.
On pose pour $f \in E$, $N_1(f) = |f(0)| + 2\displaystyle\int_0^1 |f'(t)|\,dt$ et $N_2(f) = 2|f(0)| + \displaystyle\int_0^1 |f'(t)|\,dt$.

**1.** Démontrer que $N_1$ définit une norme sur $E$.
De même, $N_2$ est une norme sur $E$, il est inutile de le démontrer.

**2.** **a.** Donner la définition de deux normes équivalentes.

**b.** Démontrer que les deux normes $N_1$ et $N_2$ sont équivalentes sur $E$.

**3.** Toutes les normes sur $E$ sont-elles équivalentes à la norme $N_1$ ?

# Problème :

**Notations**

Soit $n$ et $p$ des entiers supérieurs ou égaux à 1. $\mathbb{K}$ désignant le corps des réels ou celui des complexes, on note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des matrices à coefficients dans $\mathbb{K}$ ayant $n$ lignes et $p$ colonnes. Lorsque $p = n$, $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ est noté plus simplement $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et est muni de sa structure d'algèbre, $I_n$ représentant la matrice identité.

$0_{n,p}$ désigne la matrice nulle de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $0_n$ la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

$GL_n(\mathbb{K})$ désigne l'ensemble des matrices inversibles de $M_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{T}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre $n$ triangulaires supérieures à éléments dans $\mathbb{K}$.

Tout vecteur $x = (x_i)_{1\leq i\leq n}$ de $\mathbb{K}^n$ est identifié à un élément $X$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ tel que l'élément de la $i^{\text{ème}}$ ligne de $X$ soit $x_i$. Dans toute la suite, nous noterons indifféremment $X = (x_i)_{1\leq i\leq n}$ un élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ aussi bien que le vecteur de $\mathbb{K}^n$ qui lui est associé.

Pour $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}}$ dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $X = (x_i)_{1\leq i\leq p}$ dans $\mathbb{K}^p$, on note $(AX)_i$ le coefficient de la $i^{\text{ème}}$ ligne de $AX$.

Pour toute matrice $A$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on note $\operatorname{Sp} A$ l'ensemble des valeurs propres complexes de $A$ et on appelle rayon spectral de $A$ le réel $\rho(A)$ défini par :

$$\rho(A) = \max_{\lambda\in\operatorname{Sp} A} |\lambda|.$$

Conformément à l'usage, on note $N_\infty$ la norme définie sur $\mathbb{C}^n$ par :

$$\forall X = (x_i)_{1\leq i\leq n} \in \mathbb{C}^n, N_\infty(X) = \max_{1\leq i\leq n} |x_i|.$$

On qualifie de norme matricielle toute norme $\|.\|$ définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant de plus la propriété :

$$\forall (A,B) \in (\mathcal{M}_{n(\mathbb{K})})^2, \|AB\|\leq\|A\|\|B\|.$$

$\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ étant de dimension finie, on rappelle qu'une suite de matrices $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ converge vers une matrice $A$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ si et seulement si la convergence a lieu dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ muni d'une norme quelconque.

**Partie I**

**1.** Rappeler la définition d'une matrice trigonalisable.

**2.** On se propose dans cette question de démontrer (comme dans le cours) que toute matrice carrée à coefficients complexes est trigonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Pour $n$ fixé, on suppose que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable et on considère une matrice $M$ de $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{C})$.

**a.** Justifier que $M$ admet au moins une valeur propre.

**b.** Soit $\lambda$ une valeur propre de $M$.
Montrer qu'il existe $Q \in GL_{n+1}(\mathbb{C})$, $L \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{C})$ et $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tels que :

$$Q^{-1}MQ = \begin{pmatrix} \lambda & L \\ 0_{n,1} & N \end{pmatrix}.$$

**c.** En déduire qu'il existe $H \in GL_n(\mathbb{C})$ et $S \in \mathcal{T}_n(\mathbb{C})$ tels que :

$$Q^{-1}MQ = \begin{pmatrix} \lambda & L \\ 0_{n,1} & HSH^{-1} \end{pmatrix}.$$

**d.** On pose $R = \begin{pmatrix} 1 & 0_{1,n} \\ 0_{n,1} & H \end{pmatrix}$. Montrer que $R$ est inversible et exprimer $R^{-1}$.

**e.** Calculer $R^{-1}Q^{-1}MQR$ et en déduire que $M$ est trigonalisable.

**3.** Déduire de la question précédente que pour tout $n$ entier supérieur ou égal à 1, toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable.

**4.** Soit la matrice $G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix}$.

**a.** La matrice $G$ est-elle diagonalisable ?

**b.** On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{C}^3$. Montrer que $G$ admet un unique vecteur propre $u$ dont la première composante dans la base $\mathcal{B}$ est égale à 1 et vérifier que $\mathcal{B}_1 = (u, e_2, e_3)$ est une base de $\mathbb{C}^3$.

**c.** On note $Q$ la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}_1$. Calculer $Q^{-1}GQ$ et en déduire, en s'inspirant de la méthode décrite aux questions **I.2** et **I.3**, $P \in GL_3(\mathbb{C})$ et $T \in \mathcal{T}_3(\mathbb{C})$ telles que $P^{-1}GP = T$.

**5.** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Si $T$ est une matrice triangulaire supérieure semblable à $A$, que représentent les éléments diagonaux de $T$ ?

**6.** Soit $S = (s_{i,j})$ et $T = (t_{i,j})$ deux matrices triangulaires supérieures de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

**a.** Montrer que $ST$ est une matrice triangulaire supérieure dont les coefficients diagonaux sont $s_{1,1}t_{1,1}$, $s_{2,2}t_{2,2}$, ..., $s_{n,n}t_{n,n}$.

**b.** Pour $k \in \mathbb{N}^*$, quels sont les éléments diagonaux de $T^k$ ?

**7.** Montrer que pour toute matrice $A$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\rho\left(A^k\right) = [\rho(A)]^k$.

**8.** Montrer que l'application $\|.\| : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{R}, A = (a_{i,j}) \mapsto \|A\| = \max\limits_{1 \leq i,j \leq n} |a_{i,j}|$ est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, mais n'est pas en général une norme matricielle sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

**9.** En admettant l'existence de normes matricielles sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (la suite du problème montrera effectivement cette existence), montrer que pour toute norme $N$ définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, il existe une constante $C$ réelle positive telle que :

$$\forall (A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^2, N(AB) \leq C N(A) N(B).$$

**10.** Soit $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $P \in GL_n(\mathbb{C})$. Montrer que la suite $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers $A$ si et seulement si la suite $\left(P^{-1}A_kP\right)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers $P^{-1}AP$.

**11. a.** Soit $T = \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ un élément de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, calculer $T^k$ et en déduire que la suite $\left(T^k\right)_{k \in \mathbb{N}^*}$ converge si et seulement si ($|\lambda| < 1$) ou ($\lambda = 1$ et $\mu = 0$).

**b.** Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ diagonalisable. Donner une condition nécessaire et suffisante sur les valeurs propres de $A$ pour que la suite $(A^k)_{k \in \mathbb{N}}$ soit convergente.

**c.** Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ non diagonalisable. Montrer que la suite $(A^k)_{k \in \mathbb{N}}$ est convergente si et seulement si $\rho(A) < 1$. Dans ce cas, préciser $\lim\limits_{k \to +\infty} A^k$.

**d.** Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $\rho(A)$ pour que la suite $(A^k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers la matrice nulle.

## Partie II

Soit $A = (a_{i,j})$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $N$ une norme quelconque sur $\mathbb{C}^n$. On pose : $M_A = \max\limits_{1\leq i\leq n} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{i,j}|$.

**1.** **a.** Montrer que pour tout $X \in \mathbb{C}^n$ : $N_\infty(AX)\leq M_A N_\infty(X)$.

**b.** Montrer qu'il existe une constante réelle $C_A$ telle que :

$$\forall X \in \mathbb{C}^n, N(AX)\leq C_A N(X).$$

**c.** Montrer que l'ensemble $\left\{\dfrac{N(AX)}{N(X)} \text{ tel que } X \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}\right\}$ possède une borne supérieure.

On notera dans la suite : $\widetilde{N}(A) = \sup\limits_{X\in\mathbb{C}^n\setminus\{0\}} \dfrac{N(AX)}{N(X)}$.

**d.** Montrer que : $\widetilde{N}_\infty(A)\leq M_A$.

**e.** On reprend dans cette question la matrice $G$ introduite en **I.4**.
Déterminer un vecteur $X_0$ de $\mathbb{C}^3$ tel que $N_\infty(X_0) = 1$ et $N_\infty(GX_0) = 10$.
En déduire la valeur de $\widetilde{N_\infty}(G)$.

**2.** Soit $i_0$ un entier compris entre 1 et $n$ tel que $\sum\limits_{j=1}^{n} |a_{i_0,j}| = M_A$. En considérant le vecteur $Y$ de $\mathbb{C}^n$ de composantes $y_j$ définies par :

$$y_j = \frac{\overline{a_{i_0,j}}}{|a_{i_0,j}|} \text{ si } a_{i_0,j}\neq 0 \text{ et } y_j = 1 \text{ si } a_{i_0,j} = 0$$

montrer que $M_A\leq\widetilde{N}_\infty(A)$ et en déduire $\widetilde{N}_\infty(A) = M_A$.

**3.** Montrer :

**a.** $\widetilde{N}(A) = 0 \Leftrightarrow A = 0_n$.

**b.** $\forall\lambda \in \mathbb{C}, \widetilde{N}(\lambda A)\leq |\lambda|\, \widetilde{N}(A)$.

**c.** En déduire : $\forall\lambda \in \mathbb{C}, \widetilde{N}(\lambda A) = |\lambda|\, \widetilde{N}(A)$.

**d.** $\forall B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \widetilde{N}(A + B)\leq\widetilde{N}(A) + \widetilde{N}(B)$.

**e.** $\forall X \in \mathbb{C}^n, N(AX)\leq\widetilde{N}(A)N(X)$.

**f.** Déduire de ces résultats que $\widetilde{N}$ est une norme matricielle sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On lui donne le nom de norme matricielle subordonnée à la norme $N$.

**4.** **a.** En considérant une valeur propre $\lambda$ de $A$ telle que $|\lambda| = \rho(A)$, montrer que : $\rho(A)\leq\widetilde{N}(A)$.

**b.** Donner un exemple simple de matrice $A$ non nulle vérifiant $\rho(A) = \widetilde{N}_\infty(A)$.

**c.** Montrer que si $A$ est nilpotente non nulle, on a l'inégalité stricte : $\rho(A) < \widetilde{N}(A)$.

**5.** Montrer que si $\lim\limits_{k\to+\infty} A^k = 0_n$, alors $\rho(A) < 1$.

**Dans toute la suite du problème, on admettra que, réciproquement, si $\rho(A) < 1$, alors $\lim\limits_{k\to+\infty} A^k = 0_n$.**

**6.** **a.** Montrer que pour tout $k$ entier naturel non nul : $\rho(A)\leq \left[\widetilde{N}\left(A^k\right)\right]^{\frac{1}{k}}$.

**b.** Montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$, $\rho(\alpha A) = |\alpha|\, \rho(A)$.

**c.** Soit $\varepsilon > 0$ et $A_\varepsilon = \dfrac{A}{\rho(A) + \varepsilon}$. Vérifier que $\rho(A_\varepsilon) < 1$ et en déduire l'existence d'un entier naturel $k_\varepsilon$ tel que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \left(k\geq k_\varepsilon \Rightarrow \widetilde{N}\left(A^k\right) \leq (\rho(A) + \varepsilon)^k\right).$$

**d.** En déduire $\lim\limits_{k\to+\infty} \left[\widetilde{N}\left(A^k\right)\right]^{\frac{1}{k}} = \rho(A)$.