CCP MP 2012 Maths II

Exercice

1. On peut prendre un air inspiré et invoquer des résultats élaborés... ou bien calculer :

$$3^1 = 3 \equiv 3\ [11], \qquad 3^2 = 9 \equiv [9]\ [11], \qquad 3^3 \equiv 3 \times 9 \equiv 5\ [11], \qquad 3^4 \equiv 3 \times 5 \equiv 4\ [11],$$

et enfin $3^5 \equiv 3 \times 4 \equiv 1\ [11]$:

$$\boxed{\text{Le plus petit entier strictement positif } p \text{ tel que } 3^p \equiv 1\ [11] \text{ est } 5.}$$

2. Puisque $3^5 \equiv 1\ [11]$, on a $3^{n+2012} \equiv 3^{n+2} = 9 \cdot 3^n\ [11]$, et il s'agit donc de montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $9(3^n - 5^{2n}) \equiv 0\ [11]$. Puisque $5^{2n} = 25^n \equiv 3^n\ [11]$, l'affaire est entendue :

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ 3^{n+2012} - 9 \times 5^{2n} \text{ est divisible pas } 11.}$$

Problème

I Étude du cas $n = 2$

1. Left to the reader...

2. On calcule calmement...

```
> with(LinearAlgebra):
> phi:=(A,M)->A.M-M.A:
> A:=Matrix([[a,b],[c,d]]):
  E:=(i0,j0)->Matrix(2,2, (i,j)->if i=i0 and j=j0 then 1 else 0 fi ):
> phi(A,E(1,1)),phi(A,E(2,2)),phi(A,E(1,2)),phi(A,E(2,1));
```

$$\begin{bmatrix} 0 & -b \\ c & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & b \\ -c & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -c & a-d \\ 0 & c \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b & 0 \\ d-a & -b \end{bmatrix}$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{La matrice de } \varphi_{\mathrm{A}} \text{ dans } (\mathrm{E}_{1,1}, \mathrm{E}_{2,2}, \mathrm{E}_{1,2}, \mathrm{E}_{2,1}) \text{ vaut } \begin{bmatrix} 0 & 0 & -c & b \\ 0 & 0 & c & -b \\ -b & b & a-d & 0 \\ c & -c & 0 & d-a \end{bmatrix}}$$

L'énoncé utilise l'équivalence bien connue : « je commute avec tout le monde si et seulement si je suis une matrice scalaire[1] ». Ce résultat bien connu peut être vu ici comme conséquence de la question précédente : φ_{A} est nulle si et seulement si sa matrice dans la base canonique de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ est nulle, ce qui est équivalent à $c = b = a - d = 0$, soit encore : $\mathrm{A} = a\mathrm{I}_2$.

3. Puisque c'est permis :

```
> CharacteristicPolynomial(Matrix([[0,0,-c,b],[0,0,c,-b],[-b,b,a-d,0],[c,-c,0,d-a]]),X);
```

$$\mathrm{X}^4 + (-4bc + 2da - d^2 - a^2)\mathrm{X}^2$$

Après toilettage :

$$\boxed{\chi_{\varphi_{\mathrm{A}}} = \mathrm{X}^2 \left(\mathrm{X}^2 - \left(4bc + (a-d)^2\right)\right)}$$

[1] On appelle **matrice scalaire** une matrice qui est multiple de l'identité. Une telle matrice commute évidemment avec tout le monde, comme le font les « scalaires » — d'où leur nom.

4. Opérons pas disjonction des cas.

- Tout d'abord, supposons $\alpha := (d-a)^2 + 4bc > 0$. On a alors $\chi_{\varphi_{\mathrm{A}}} = \mathrm{X}^2(\mathrm{X}-\sqrt{\alpha})(\mathrm{X}+\sqrt{\alpha})$: ce polynôme caractéristique est scindé, donc A est diagonalisable si et seulement si la dimension de chaque sous-espaces propre est égale à la multiplicité de la valeur propre associée, soit encore (puisque ces dimensions sont strictement positives et majorées par la multiplicité) : $\dim(\operatorname{Ker}\varphi_{\mathrm{A}}) \geqslant 2$. Or le noyau de φ_{A} contient I_2 et A qui sont linéairement indépendantes par hypothèse, donc le noyau de φ_{A} est effectivement de dimension au moins 2, puis exactement 2, donc φ_{A} est diagonalisable.
- Si $(d-a)^2 + 4bc < 0$, alors $\chi_{\varphi_{\mathrm{A}}}$ n'est pas scindé dans $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$, donc φ_{A} n'est pas diagonalisable.
- Enfin, si $(d-a)^2 + 4bc = 0$, alors $\chi_{\varphi_{\mathrm{A}}} = \mathrm{X}^4$ est bien scindé, mais φ_{A} est alors nilpotent ($\varphi_{\mathrm{A}}^4 = 0$ d'après le théorème de Cayley-Hamilton), donc n'est diagonalisable que s'il est nul, ce qui avait été exclu.

$$\boxed{\varphi_{\mathrm{A}} \text{ est diagonalisable si et seulement si } (d-a)^2 + 4bc > 0.}$$

5. Pour une matrice de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ qui n'est pas scalaire, il y a équivalence entre le fait d'être diagonalisable et celui de posséder deux valeurs propres distinctes. Un sens est clair (si je possède deux valeurs propres distinctes en dimension 2, alors je suis diagonalisable) et l'autre pas trop compliqué non plus (si je suis diagonalisable alors je possède au moins une valeur propre, et si je n'en possède qu'une, alors je suis semblable à une matrice scalaire, donc je suis égal à une matrice scalaire).

Ainsi, il y a équivalence entre les énoncés :

(a) A (supposée non scalaire) est diagonalisable ;

(b) χ_{A} possède deux racines distinctes ;

(c) χ_{A} (qui vaut $\mathrm{X}^2 - (a+d)\mathrm{X} + (ad-bc)$) a un discriminant strictement positif ;

(d) $(a+d)^2 > 4(ad-bc)$;

(e) $(a-d)^2 + 4bc > 0$.

Cette dernière relation est précisément la condition vue à la question précédente.

$$\boxed{\text{A est diagonalisable si et seulement si } \varphi_{\mathrm{A}} \text{ est diagonalisable.}}$$

II Étude du cas général

6. (a) Calcul pas bien méchant[2] : $\mathrm{DE}_{i,j} = \lambda_i \mathrm{E}_{i,j}$ et $\mathrm{E}_{i,j}\mathrm{D} = \lambda_j \mathrm{E}_{i,j}$ donc :

$$\boxed{\text{Pour tout } (i,j) \in [\![1\,;\,n]\!]^2, \text{ on a} \quad \mathrm{DE}_{i,j} - \mathrm{E}_{i,j}\mathrm{D} = (\lambda_i - \lambda_j)\mathrm{E}_{i,j}.}$$

(b) Puisque $\mathrm{B}_{i,j} = \mathrm{PE}_{i,j}\mathrm{P}^{-1}$, il vient :

$$\varphi_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}_{i,j}) = \mathrm{APE}_{i,j}\mathrm{P}^{-1} - \mathrm{PE}_{i,j}\mathrm{P}^{-1}\mathrm{A} = \mathrm{P}\left(\mathrm{P}^{-1}\mathrm{APE}_{i,j} - \mathrm{E}_{i,j}\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}\right)\mathrm{P}^{-1}.$$

Mais d'après la définition de P, on a $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP} = \mathrm{D}$ (matrice de u dans la nouvelle base, P étant la matrice de passage de l'ancienne vers la nouvelle) ; et ainsi d'après le calcul précédent :

$$\varphi_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}_{i,j}) = \mathrm{P}\left((\lambda_i - \lambda_j)\mathrm{E}_{i,j}\right)\mathrm{P}^{-1} = (\lambda_i - \lambda_j)\mathrm{B}_{i,j},$$

et bien entendu, $\mathrm{B}_{i,j}$ est non nul.

$$\boxed{\text{Si } (i,j) \in [\![1\,;\,n]\!]^2, \text{ alors } \mathrm{B}_{i,j} \text{ est vecteur propre de } \varphi_{\mathrm{A}}.}$$

(c) On vient d'exhiber une famille de n^2 vecteurs propres pour φ_{A}. De plus, l'application $\mathrm{M} \mapsto \mathrm{PMP}^{-1}$ est un automorphisme de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, donc l'image de la base canonique de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ est une autre base de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, constituée de vecteurs propres de φ_{A}.

$$\boxed{\varphi_{\mathrm{A}} \text{ est diagonalisable.}}$$

[2]Et on se souvient vaguement que les multiplications par des matrices élémentaires — ici de dilatation — agissent sur les lignes et colonnes...
On peut également faire usage de la formule générale

$$\mathrm{E}_{i,j} \cdot \mathrm{E}_{k,\ell} = \delta_{j,k}\,\mathrm{E}_{i,\ell}$$

et l'appliquer avec $\mathrm{D} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k\,\mathrm{E}_{k,k}$.

7. (a) i. Cette question est peut-être plus fine que ce que laisse penser le rapport du jury. Il s'agit de voir de quel φ_{A} on parle : celui diagonalisable en tant qu'endomorphisme de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, ou bien l'endomorphisme de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$? Il ne s'agit pas des même objets... mais la famille $(\mathrm{P}_{i,j})_{i,j}$ constitue une famille libre de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ *donc* de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ (ce qui n'est peut-être pas si évident, vous ne trouvez pas ?), donc constitue une base de vecteurs propres de φ_{A} (agissant sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$), donc les valeurs propres « des deux φ_{A} » sont les mêmes. Comme le premier est diagonalisable sur $\mathbb{R}$...

$$\boxed{\text{Les valeurs propres de } \varphi_{\mathrm{A}} \text{ sont réelles.}}$$

ii. Fastoche : si z est valeur propre de A, alors $\mathrm{A} - z\mathrm{I}_n$ est non inversible, donc sa transposée ${}^{\mathrm{t}}\mathrm{A} - z\mathrm{I}_n$ on plus, donc z est valeur propre de ${}^{\mathrm{t}}\mathrm{A}$.

$$\boxed{\text{Si } z \text{ est valeur propre de A, alors } z \text{ est également valeur propre de } {}^{\mathrm{t}}\mathrm{A}.}$$

Rappelons que ces relations entre le rang (ou le déterminant, l'inversibilité, ou encore le spectre) d'une matrice et celui de sa transposée sont « faciles à démontrer » mais tout de même assez profondes : de l'existence d'une dépendance linéaire (évidente) entre les lignes de $\begin{pmatrix} 1 & -3 & -933 \\ 2 & 4 & 934 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ *on peut déduire l'existence d'une dépendance linéaire (probablement moins évidente) entre les colonnes de cette matrice.*

iii. On calcule sans trop de mal :

$$\varphi_{\mathrm{A}}(\mathrm{X}\,{}^{\mathrm{t}}\mathrm{Y}) = \underbrace{\mathrm{AX}}_{z\mathrm{X}}\,{}^{\mathrm{t}}\mathrm{Y} - \mathrm{X}\,\underbrace{{}^{\mathrm{t}}\mathrm{YA}}_{\bar{z}\,{}^{\mathrm{t}}\mathrm{Y}} = z\mathrm{X}\,{}^{\mathrm{t}}\mathrm{Y} - \bar{z}\mathrm{X}\,{}^{\mathrm{t}}\mathrm{Y} = (z - \bar{z})\mathrm{X}\,{}^{\mathrm{t}}\mathrm{Y}.$$

Or $\mathrm{X}\,{}^{\mathrm{t}}\mathrm{Y} \neq 0$ (les colonnes sont toutes proportionnelles à ${}^{\mathrm{t}}\mathrm{Y} \neq 0$ et comme $\mathrm{X} \neq 0$, l'une au moins est non nulle), donc $\mathrm{X}\,{}^{\mathrm{t}}\mathrm{Y}$ est un vecteur propre associé à la valeur propre $z - \bar{z}$.

$$\boxed{z - \bar{z} \text{ est une valeur propre de } \varphi_{\mathrm{A}}.}$$

(b) Tout d'abord, A possède une valeur propre complexe (son polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$), disons z. Si on note X un vecteur propre associé, alors $\mathrm{AX} = z\mathrm{X}$, donc en conjuguant (et puisque A est à coefficients réels) : $\mathrm{A}\overline{\mathrm{X}} = \bar{z}\overline{\mathrm{X}}$, donc $\bar{z}$ est également valeur propre de A, et les questions précédentes nous assurent que $z - \bar{z}$ est valeur propre de φ_{A}. Ainsi, $z - \bar{z}$ est réel, ce qui implique[3] que z est réel !

$$\boxed{\text{A possède une valeur propre réelle.}}$$

(c) Simple calcul : si $(i, j) \in [\![1\,;n]\!]^2$, alors en multipliant (à droite) la relation $\mathrm{AP}_{i,j} - \mathrm{P}_{i,j}\mathrm{A} = \lambda_{i,j}\mathrm{P}_{i,j}$ par X, on obtient

$$\mathrm{AP}_{i,j}\mathrm{X} - \mathrm{P}_{i,j}\,\underbrace{\mathrm{AX}}_{\lambda\mathrm{X}} = \lambda_{i,j}\,\mathrm{P}_{i,j}\mathrm{X},$$

puis :

$$\boxed{\mathrm{AP}_{i,j}\mathrm{X} = (\lambda_{i,j} + \lambda)\,\mathrm{P}_{i,j}\,\mathrm{X}.}$$

(d) Voici une question intéressante et fine.

En première approximation, c'est facile : les questions précédentes nous ont fourni pléthore de vecteurs propres (les $\mathrm{P}_{i,j}\mathrm{X}$). Encore faudrait-il que ces $\mathrm{P}_{i,j}\mathrm{X}$ soient non nuls... puis constituent une base de $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Comme il y en a n^2, « le caractère libre n'est pas évident »... ☹

Reprenons calmement. On peut voir les matrices $\mathrm{P}_{i,j}\mathrm{X}$ comme l'image de la base $(\mathrm{P}_{i,j})_{i,j}$ par l'application linéaire

$$\begin{aligned} \Phi\colon\ \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \\ \mathrm{M} &\longmapsto \mathrm{MX}. \end{aligned}$$

Ce que nous voulons montrer, c'est que les $\mathrm{P}_{ij}\mathrm{X}$ engendrent l'espace d'arrivée, ou encore que Φ est surjective.

Cette propriété est alors classique si l'on raisonne géométriquement : si $x \neq 0$ et y sont des vecteurs d'un espace E, existe-t-il un endomorphisme qui envoie x sur y ? Bien sûr : il suffit de compléter (x) en une base puis définir un endomorphisme u par son action sur cette base, en *posant* $u(x) = y$ et $u(e) =$ *ce que l'on* veut pour tous les autres vecteurs de la base ainsi fabriquée.

Ainsi, $(\mathrm{P}_{ij}\mathrm{X})_{ij}$, image d'une famille génératrice de l'espace de départ, est génératrice dans l'espace d'arrivée : on peut en extraire une base de $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, qui constitue alors une base de vecteurs propres de A.

$$\boxed{\text{A est diagonalisable.}}$$

[3] Pas convaincu ? Pffff... Écrire $z = a + ib$!

III Étude des vecteurs propres de φ_A associés à la valeur propre 0

8. Tout d'abord, en divisant euclidiennement un polynôme P par le polynôme minimal de A, on voit que P(A) est égal à R(A), avec R de degré strictement plus petit que m, donc $(I, A, \ldots, A^{m-1})$ constitue une famille génératrice de $\mathbb{R}[A]$.
Ensuite, une éventuelle combinaison linéaire nulle et non triviale de $(I, A, \ldots, A^{m-1})$ fournirait un polynôme non nul annulant A et de degré strictement plus petit que m, ce qui serait absurde d'après la définition du polynôme minimal : c'est exclu. Ceci prouve la liberté.

$$\boxed{(I, A, \ldots, A^{m-1}) \text{ constitue une base de } \mathbb{R}[A].}$$

9. La matrice A commute bien entendu[4] avec tout polynôme en A, donc $\mathbb{R}[A] \subset \operatorname{Ker} \varphi_A$, et d'après la question précédente, $\mathbb{R}[A]$ est de dimension m.

$$\boxed{\dim(\operatorname{Ker} \varphi_A) \geqslant m.}$$

10. (a) Voici une situation assez nouvelle ! ☺
Face à n vecteurs en dimension n, on peut tenter de montrer la liberté. Pour cela :
❏ **Soient $\boldsymbol{\lambda_1, \ldots, \lambda_1}$ des réels tels que $\boldsymbol{\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_n e_n = 0}$.** *(On va montrer que les λ_i sont tous nuls...)*
Puisque

$$\lambda_1 u^{n-1}(y) + \lambda_2 u^{n-2}(y) + \cdots + \lambda_{n-1} u(y) + \lambda_n y = 0,$$

appliquer u^{n-1} au vecteur précédent ferait disparaître tous les termes sauf $\lambda_n u^{n-1}(y)$. Puisque $u^{n-1}(y) \neq 0$, on en déduirait $\lambda_n = 0$, enclenchant une récurrence simple, mais avec prédécesseurs.
On sait bien qu'une façon classique et finalement rapide de montrer la nullité de tous les λ_i consiste à raisonner par l'absurde :
► **On suppose qu'il en existe au moins un des $\boldsymbol{\lambda_k}$ non nul**, et on note i_0 l'indice *maximal*[5] tel que $\lambda_{i_0} \neq 0$. On a donc

$$\lambda_1 u^{n-1}(y) + \lambda_2 u^{n-2}(y) + \cdots + \lambda_{n-i_0} u^{n-i_0}(y) = 0.$$

On applique u^{i_0-1} à la combinaison linéaire nulle initiale, on trouve

$$\lambda_1 \underbrace{u^{n+i_0-2}(y)}_{=0} + \cdots + \lambda_{i_0-1} \underbrace{u^n(y)}_{=0} + \lambda_{i_0} u^{n-1}(y) = 0,$$

donc $\lambda_{i_0} u^{n-1}(y) = 0$, **ce qui est absurde** puisque $\lambda_{i_0} \neq 0$ et $u^{n-1}(y) \neq 0$. ◄
Ainsi, la combinaison linéaire initiale était triviale : $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$. ❏
On en déduit que la famille $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est libre.

$$\boxed{(e_1, e_2, \ldots, e_n) \text{ est une base de } \mathbb{R}^n.}$$

(b) Supposons : $v(y) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$, et montrons que v est égal à l'endomorphisme $w = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u^{n-i}$. Pour cela, il sufit de montrer que ces endomorphismes coïncident sur la base $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$.
On fixe donc $j \in [\![1\,;n]\!]$. D'une part

$$w\left(u^j(y)\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u^{n-i}\left(u^j(y)\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u^{n-i+j}(y),$$

et d'autre part, puisque $B \in \operatorname{Ker} \varphi_A$, on a $AB = BA$, donc $u \circ v = v \circ u$, donc v commute avec u, donc aussi tous les u^i. Ainsi :

$$v\left(u^j(y)\right) = u^j\left(v(y)\right) = u^j\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u^j(\underbrace{e_i}_{u^{n-i}(y)}) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u^{n-i+j}(y),$$

donc v et w coïncident sur la base $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$:

$$\boxed{\text{Si } v(y) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i \text{ alors } v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u^{n-i}.}$$

[4] Un doute ? $P(A) \cdot A = (PX)(A) = (XP)(A) = A \cdot P(A)$...
[5] Ben oui : on part de la droite !

(c) La précédente nous dit que si B est dans le noyau de $\operatorname{Ker}\varphi_A$, alors B est combinaison linéaire des A^{n-i}, donc est dans $\mathbb{R}[A]$, ce qui donne l'inclusion $\operatorname{Ker}\varphi_A \subset \mathbb{R}[A]$. L'inclusion réciproque a été vue plus haut.

$$\boxed{\operatorname{Ker}\varphi_A = \mathbb{R}_{m-1}[A] = \mathbb{R}[A].}$$

On peut aussi passer par le calcul, dans une base adaptée. Si une matrice M *commute avec la matrice nilpotente d'indice* n *usuelle, alors elle vérifie* $m_{i,j} = 0$ *si* $i \geqslant j$*, et* $m_{i,i+k} = m_{1,k+1}$ *pour tout* $k \in [\![1\,;n-1]\!]$ *et* $i \in [\![1\,;n-k-1]\!]$ *(faire un dessin); etc.*

11. (a) Il est bien entendu exclu de travailler par équivalence...

- **Supposons : $\mathbf{B \in \operatorname{Ker}\varphi_A}$.** On a alors $u \circ v = v \circ u$, donc les sous-espaces propres de u sont stables par v : c'était ce qui est demandé.
  Un doute ? ❏ **On fixe $\boldsymbol{x \in E_u(\lambda_k)}$.** On a :
  $$u\,(v(x)) = (u \circ v)(x) = (v \circ u)(x) = v\,(u(x)) = v\,(\lambda_k x) = \lambda_k v(x),$$
  ce qui prouve bien : $v(x) \in E_u(\lambda_k)$. ❏
- **Supposons maintenant que pour tout $\boldsymbol{k \in [\![1\,;p]\!]}$, $\boldsymbol{E_u(\lambda_k)}$ est stable par $\boldsymbol{v}$.** Sur chaque sous-espace propre de u, la restriction de u est une homothétie, donc commute avec la restriction de v. Ainsi, u et v commutent sur chaque sous-espace propre, donc sur la somme des sous-espaces propres. Comme cette somme vaut E (u est diagonalisable), u et v commutent, donc AB = BA, et B est donc dans le noyau de φ_A.

$$\boxed{B \in \operatorname{Ker}\varphi_A \text{ si et seulement si pour tout } k \in [\![1\,;p]\!],\ E_u(\lambda_k) \text{ est stable par } v.}$$

(b) Le fait que les sous-espaces propres de u soient stables par v se traduit par le caractère « diagonal par blocs » de la matrice de u dans une base adaptée, et donc, d'après la question précédente :

$$\boxed{B \in \operatorname{Ker}\varphi_A \text{ si et seulement si la matrice de } v \text{ dans une base adaptée est diagonale par blocs.}}$$

$$\operatorname*{mat}_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A_k \end{pmatrix} \begin{array}{l} \updownarrow m_1 \\ \updownarrow m_2 \\ \\ \updownarrow m_k \end{array}$$

(c) Il s'agit d'expliciter une base des matrices de la forme précédente. C'est toujours un peu pénible à raconter. Notons par exemple P l'ensemble des $(i,j) \in [\![1\,;n]\!]^2$ correspondant à des positions à l'intérieur des blocs diagonaux. Le cardinal de P est donc $d := \sum_{i=1}^{k} m_k^2$. Une base de l'espace D des matrices diagonales par blocs de la forme précédente est donc $\{E_{i,j}\ ;\ (i,j) \in P\}$, ce qui prouve que cet espace est de dimension d.
Le noyau de φ_A est alors l'image de D par l'automorphisme $M \mapsto QMQ^{-1}$, où Q est la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ à la base adaptée précédemment choisie.
On en déduit:

$$\boxed{\text{La dimension de } \operatorname{Ker}\varphi_A \text{ est } \sum_{i=1}^{k} m_i^2.}$$

(d) Il s'agit ici de lister les décompositions $7 = p_1 + \cdots + p_k$, à l'ordre près. On peut par exemple imposer aux p_i d'être classés par ordre croissant, ce qui réglera la question de l'ordre. Pour ne pas oublier de cas, on peut commencer par maximiser le nombre de 1 ; ensuite, le nombre de 2 ; etc.

$$\begin{aligned}
7 &= 1+1+1+1+1+1+1 & &= 1+1+1+1+1+2 \\
&= 1+1+1+1+3 & &= 1+1+1+2+2 \\
&= 1+1+1+4 & &= 1+1+2+3 \\
&= 1+1+5 & &= 1+2+2+2 \\
&= 1+2+4 & &= 1+3+3 \\
&= 1+6 & &= 2+2+3 \\
&= 2+5 & &= 3+4,
\end{aligned}$$

soit 15 possibilités ! Certaines conduisent à la même dimension pour $\operatorname{Ker}\varphi_A$.

$$\boxed{\text{Les 12 différentes dimensions possibles pour } \operatorname{Ker}\varphi_A \text{ sont : } 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 27, 29, 37, 49.}$$

Bonus : sauriez-vous justifier en une ligne que ces sommes de carrés étaient forcément impaires ?
Dénombrer les partitions d'un entier (ici, 15 partitions de 7) est un grand classique combinatoire...

IV Étude des vecteurs propres de φ_{A} associés à une valeur propre non nulle

12. J'imagine que ça doit pouvoir se faire par récurrence. Vue la longueur raisonnable de l'épreuve, j'imagine que la rédaction était exigée ! Allons-y.
Pour tout entier k, on note $\mathscr{P}(k)$ la proposition :

$$\mathscr{P}(k) : \quad \text{« } \varphi_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}^k) = \alpha k\,\mathrm{B}^k. \text{ »}$$

- **$\mathscr{P}(0)$ est évidemment vraie** puisque $\varphi_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}^0) = \varphi_{\mathrm{A}}(\mathrm{I}_n) = \mathrm{A}\,\mathrm{I}_n - \mathrm{I}_n\,\mathrm{A} = 0$.
- **Soit $k \in \mathbb{N}$ et supposons les propriétés $\mathscr{P}(0), \dots, \mathscr{P}(k)$ vérifiées.** On a alors

$$\begin{aligned}
\varphi_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}^{k+1}) &= \mathrm{AB}^{k+1} - \mathrm{B}^{k+1}\mathrm{A} = \underbrace{\mathrm{AB}^k}\,\mathrm{B} - \mathrm{B}^{k+1}\mathrm{A} \\
&= (\mathrm{BA}^k + \alpha k\,\mathrm{B}^k)\,\mathrm{B} - \mathrm{B}^{k+1}\mathrm{A} && \textit{par } \mathscr{P}(k) \\
&= \mathrm{B}^k\,\underbrace{\mathrm{AB}} + \alpha k\,\mathrm{B}^{\mathrm{K}+1} - \mathrm{B}^{k+1}\mathrm{A} \\
&= \mathrm{B}^k(\mathrm{BA} + \alpha\mathrm{B}) + \alpha k\,\mathrm{B}^{\mathrm{K}+1} - \mathrm{B}^{k+1}\mathrm{A} && \textit{car } \varphi_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}) = \alpha\mathrm{B} \\
&= \alpha(k+1)\,\mathrm{B}^{k+1}
\end{aligned}$$

  ce qui établit $\mathscr{P}(k+1)$.
- Le principe de récurrence permet de conclure que $\mathscr{P}(k)$ est vraie pour tout entier naturel k.

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N} \qquad \varphi_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}^k) = \alpha k\,\mathrm{B}^k.}$$

13. Soit P un polynôme, on peut l'écrire sous la forme $\mathrm{P} = \sum_{k=0}^{d} \beta_k\,\mathrm{P}^k$. On a alors, par linéarité,

$$\begin{aligned}
\varphi\left(\sum_{k=0}^{d} \beta_k\,\mathrm{B}^k\right) &= \alpha \sum_{k=1}^{d} k\,\beta_k\,\mathrm{B}^k && \textit{le terme pour } k = 0 \textit{ est nul...} \\
&= \alpha\,\mathrm{B}\sum_{k=1}^{d} k\,\beta_k\,\mathrm{B}^{k-1} = \alpha\,\mathrm{B}\,\mathrm{P}'(\mathrm{B}).
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout } \mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}], \qquad \varphi_{\mathrm{A}}\big(\mathrm{P}(\mathrm{B})\big) = \alpha\,\mathrm{B}\,\mathrm{P}'(\mathrm{B}).}$$

Voici un autre point de vue : la question précédente dit que pour $\mathrm{P} = \mathrm{X}^k$, on a $\varphi_{\mathrm{A}}(\mathrm{P}(\mathrm{B})) = \alpha\mathrm{B}\,\mathrm{P}'(\mathrm{B})$. Par linéarité, cette relation doit pouvoir s'étendre à tout polynôme P. Si ce « par linéarité » vous semble suspect... considérez l'application $\Psi : \mathrm{P} \mapsto \varphi_{\mathrm{A}}\big(\mathrm{P}(\mathrm{B})\big) - \alpha\,\mathrm{B}\,\mathrm{P}'(\mathrm{B})$: elle est linéaire (si, vraiment[6] !) et nulle sur la base canonique de $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$, donc est nulle tout court.

14. On applique le résultat précédent au polynôme minimal π_{B} : on a alors $\varphi_{\mathrm{A}}(0) = \alpha\mathrm{B}\,\pi'_{\mathrm{B}}(\mathrm{B})$. Ainsi, $\mathrm{X}\pi'_{\mathrm{B}}$ est un polynôme annulateur de B, donc est un multiple du polynôme minimal π_{B}. Mais ils ont le même degré et π_{B} est unitaire, donc il suffit de regarder le terme dominant pour obtenir le coefficient de proportionalité : il s'agit de d, le degré de π_{B}.

$$\boxed{\mathrm{X}\pi'_{\mathrm{B}} = d\,\pi_{\mathrm{B}}.}$$

15. Décomposons π_{B} sous la forme $\pi_{\mathrm{B}} = \sum_{k=0}^{d} \mu_k\,\mathrm{X}^k$. La relation précédente s'écrit

$$\sum_{k=0}^{d} k\,\mu_k\,\mathrm{X}^k = d\sum_{k=0}^{d} \mu_k\,\mathrm{X}^k$$

ce qui implique que $(k-d)\,\mu_k$ est nul pour tout $k \in [\![0\,;d]\!]$, et donc que $\mu_k = 0$ pour $k = 0, \dots, d-1$.
Ainsi, $\mu_{\mathrm{B}} = \mathrm{X}^d$ et, par définition du polynôme minimal, qui est annulateur :

$$\boxed{\mathrm{B}^d = 0.}$$

Une autre façon classique de voir les choses après la question 12 : si B^k était nul pour tout entier k, alors B^k serait vecteur propre pour φ_{A}, pour la valeur propre $k\alpha$. Ainsi, on aurait une infinité de valeurs propres distinctes ($\alpha \neq 0$ rappelons-le) pour φ_{A}, ce qui n'est pas possible en dimension finie. Ainsi, B est nilpotente, ce qui implique que son polynôme minimal soit de la forme X^d, où d est l'indice de nilpotence de B.

[6] Linéaire par rapport à P, bien sûr...

Thème

L'exercice, très court, avait pour objet la mise en œuvre des propriétés élémentaires des congruences modulo 11.

Le problème faisait étudier la diagonalisabilité et les vecteurs propres d'un endomorphisme de l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre *n* à coefficients réels.

Observations générales

Les questions étaient de difficulté très progressive avec de nombreuses questions faciles. Même s'ils ne les ont pas toutes traitées, la plupart des candidats sont arrivés au bout du sujet car les quatre parties du problème étaient indépendantes.

En général, les copies sont bien présentées. Il faut cependant insister sur le fait que faire ressortir clairement la numérotation des questions, ainsi que les résultats, facilite nettement la lecture d'une copie et que cela ne peut que favoriser son auteur. Les copies peu lisibles ou relevant du brouillon ont été systématiquement sanctionnées.

Les candidats qui connaissaient bien le cours (notamment les conditions de diagonalisabilité) et les techniques élémentaires de calcul pouvaient facilement obtenir une note bien supérieure à 10.

Ce sujet a permis de bien classer les candidats, la moyenne de 12,07 est très convenable et les notes sont bien étalées (écart-type de 3,67).

Remarques détaillées par question

Exercice

Il a été assez bien traité par les candidats qui l'ont abordé.
Certains candidats ont pensé que le petit théorème de Fermat permettait de répondre à la question 1 et ont donné $p = 10$ comme réponse sans plus de réflexion.
La question 2 pouvait se résoudre avec un raisonnement par récurrence mais un calcul direct était plus rapide à condition de ne pas faire des disjonctions de cas inutiles.

Problème

1. Question facile et bien traitée. Cependant, certains candidats étourdis oublient de vérifier que A appartient au noyau de φ_A.

2. La question était facile à résoudre à condition de bien voir que la matrice demandée était d'ordre 4.

3. Question réservée aux candidats qui avaient trouvé la matrice de la question 2.
Ceux qui ont des difficultés pour calculer les déterminants devraient au moins pouvoir utiliser une calculatrice.

4. De nombreux candidats ont fourni des démonstrations trop imprécises voire fausses. Il était certainement plus sûr de démontrer les deux implications séparément.
Beaucoup pensent qu'une matrice est diagonalisable si, et seulement si, son polynôme caractéristique est scindé.
On a souvent vu que le polynôme $X^2\left(X^2-\alpha\right)$ n'a que des racines simples.

5. Une erreur fréquente a été d'affirmer qu'une matrice est diagonalisable si, et seulement si, son polynôme caractéristique est scindé à racine simple.

6.
   (a) Calcul facile. De rares erreurs de signe.
   (b) Il ne fallait pas oublier de préciser que $B_{i,j} \neq 0$.
   (c) De nombreux candidats ont justifié la diagonalisabilité de φ_A par le fait que les $\lambda_i - \lambda_j$ donnaient n^2 valeurs propres distinctes ce qui n'a aucune raison d'être. D'autres pensent qu'il suffit de trouver n^2 vecteurs propres distincts sans se préoccuper de savoir s'ils forment une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

7.
   (a) i. Question facile mais les réponses proposées ne sont pas toujours claires.
   ii. Beaucoup de candidats concluent que $\lambda\lambda$ est une valeur propre de ${}^tA$ à partir de l'égalité ${}^tX\ {}^tA = \lambda\,{}^tX$.
   iii. Comme en 6(b), il ne fallait pas oublier de vérifier que $X\ {}^tY \neq 0$.
   (b) Une erreur de logique très fréquente : les candidats ont utilisé la question 7(a)iii sans se placer sous les hypothèses qui permettaient de conclure.
   (c) Question facile.
   (d) C'était certainement la question qui demandait le plus de recul de la part des candidats. En tout cas, ceux qui ont écrit que la famille $\left(P_{i,j}X\right)_{i,j}$ est une base, auraient mieux fait de réfléchir un minimum en se demandant dans quel espace ils travaillaient.

8. C'est une question classique. Néanmoins, le caractère générateur de la famille a été souvent mal démontré.

9. Question facile et bien traitée en général.

10.
   (a) Les candidats ont bien vu la démonstration en général. La différence s'est faite au niveau de la rédaction.
   (b) Pour démontrer l'égalité des deux endomorphismes, il fallait montrer qu'ils coïncidaient sur une base et pas seulement, comme on l'a trop souvent vu, sur le seul vecteur y.
   (c) Question ne posant pas de difficulté.

11.

(a) Une des deux implications a été plus souvent démontrée que l'autre.
(b) C'est presque une question de cours.
(c) Question a priori facile pour qui a bien vu la question (b) mais qui a cependant suscité de nombreuses réponses fausses.
(d) Cette question était réservée aux candidats qui avaient trouvé le résultat de la question (c). Elle a été relativement peu traitée.

12. Question bien traitée en général.

13. Question facile et bien traitée.

Les questions **14** et **15** ont été assez peu traitées.