Vendredi 12 octobre 2018

Éléments de correction

PROBLEME 1

Partie 1 : étude d'un cas déjà vu en cours...

1. **a.** **Existence :** si $x \neq 0_E$ et $(x, f(x))$ liée, alors $f(x)$ est proportionnel à x. Il existe donc au moins un λ_x convenable.
   Unicité : si $\lambda_x^{(1)}$ et $\lambda_x^{(2)}$ conviennent, alors $f(x) - f(x) = (\lambda_x^{(1)} - \lambda_x^{(2)})x = 0_E$. Comme x est supposé non nul, $\lambda_x^{(1)} = \lambda_x^{(2)}$.

   b. Comme x est non nul, iI existe α tel que $y = \alpha x$. Alors $f(y) = \lambda_y y = \alpha f(x) = \lambda_x \alpha x = \lambda_x y$. Par unicité de la question qui précède, $\lambda_y = \lambda_x$.

   c. Il existe trois scalaires tels que $f(x+y) = \lambda_{x+y}(x+y), f(x) = \lambda_x x$ et $f(y) = \lambda_y y$. Par ailleurs, $f(x)+f(y) = \lambda_x x+\lambda_y y$. En écrivant $f(x+y) = f(x)+f(y)$, on obtient, $\lambda_{x+y}(x+y) = \lambda_x x+\lambda_y y$, donc $(\lambda_{x+y} - \lambda_x)x + (\lambda_{x+y} - \lambda_y)y = 0_E$. Comme la famille (x, y) est libre, $\lambda_{x+y} = \lambda_x + \lambda_y$.

   d. On avait supposé que $\forall x \in E, \exists \lambda_x \in \mathbb{C}, f(x) = \lambda_x x$. Les questions qui précèdent permettent de montrer que λ_x est en réalité indépendant de x. Donc $\exists \lambda \in \mathbb{C}, \forall x \in E, f(x) = \lambda x$. Donc f est une homothétie et $f = \lambda id_E$. La famille (id_E, f) est effectivement une famille liée.

   Quelques applications

2. Soit $x \in E \setminus \{0\}$. Soit $D_x = Vect(x)$. D_x est une droite vectorielle. Donc $f(D_x) \subset D_x$, c'est à dire $f(x) \in D_x$, donc $\exists \lambda_x \in \mathbb{C}, f(x) = \lambda_x x$.
   D'après le paragraphe précédent, f est donc une homothétie.

3. Soit $x \in E \setminus \{0\}$. Soit $D_x = Vect(x)$. Soient y, z tels que (x, y, z) forme une famille libre. C'est possible car $dim(E) \geq 3$.
   Alors f laisse stable le plan $Vect(x, y)$ et le plan $Vect(x, z)$. Donc $f(D_x) \subset Vect(x, y) \cap Vect(x, z) = D_x$ car l'intersection des deux plans est égale à la droite D_x car x, y, z est libre.
   D'après la question qui précède, f est une homothétie.

4. **a.** Par contraposée, si f n'est pas une homothétie, il existe x_0 tel que la famille $(x_0, f(x_0))$ ne soit pas liée, donc libre.

   b. C'est le théorème de la base incomplète en dimension finie. Toute famille libre peut être complétée en une base de l'espace.

   c. On rappelle que $F = ker(s - id_E)$ et que $G = ker(s + id_E)$. Un dessin est bienvenu si vous avez le moindre doute.
   D'une part, $s \circ f(x_0) = -f(x_0)$ car $f(x_0) \in G = ker(s + id_E)$.
   D'autre part, $f(s(x_0)) = f(x_0)$ car $x_0 \in F = ker(s - id_E)$. Ainsi, $s \circ f(x_0) = -f \circ s(x_0) \neq 0_E$ car $f(x_0 \neq 0_E$ car $(x_0, f(x_0))$ est libre.
   Ainsi, $s \circ f \neq f \circ s$.

5. Encore un résultat vu en TD. Nous l'avions fait avec une projection : voilà la variante avec une symétrie. Toujours par contraposée, si f n'est pas une homothétie, alors il existe une famille $(x_0, f(x_0))$ libre. On peut donc construire une symétrie s qui ne commute pas avec f. Donc f n'appartient pas au centre de l'anneau $\mathcal{L}(E)$.

6. On rappelle qu'il est possible de démontrer ce résultat à l'aide des matrices élémentaires $E_{i,j}$. Mais ici, en considérant l'endomorphisme canoniquement associé à A, la traduction géométrique de cette équivalence est : f est une homothétie si et seulement si $f \circ g = g \circ f$ pour tout $g \in \mathcal{L}(E)$.

On a montré le sens réciproque dans ce qui précède. Le sens direct n'est pas difficile : si f est une homothétie, alors $\exists l \in \mathbb{C}, \forall x \in E, f(x) = \lambda x$ et donc pour tout endomorphisme g de E, $g(f(x)) = g(\lambda x) = \lambda g(x) = f(g(x))$.

7. On va montrer que si f stabilise tous les hyperplans, $\forall x \in E, (x, f(x))$ est liée. Par l'absurde, s'il existe x_0 tel que $(x_0, f(x_0))$ est libre, on peut compléter la famille en une base $(x_0, f(x_0), e_3, \ldots e_n)$. Alors l'hyperplan $Vect(x_0, e_3, \ldots e_n)$ n'est pas stable par f... Contradiction et résultat !

Partie 2 : étude du cas général

1. a. L'ensemble $A_x = \{k \in \mathbb{N}^* | (x, f(x), \ldots, f^{k-1}(x))$ est libre.$\}$ est une partie non vide de $\mathbb{N}^*$ et majorée par n par statut de n. Donc A_x admet un plus grand élément noté n_x. Pour $k \leq n_x$, la famille $(x, f(x), \ldots, f^{k-1}(x))$ est libre car c'est une sous-famille de $(x, f(x), \ldots, f^{n_x-1}(x))$ qui est libre par construction. Par contre, si $k > n_x$, la famille $(x, f(x), \ldots, f^{k}(x))$ est liée car c'est une sur-famille d'une famille liée. Ainsi, un tel n_x existe et est unique.

b. La famille $(x, f(x), \ldots, f^{n_x-1}(x))$ est libre et la famille $(x, f(x), \ldots, f^{n_x}(x))$ est liée. Donc $f^{n_x}(x)$ est combinaison linéaire des $(x, f(x), \ldots, f^{n_x-1}(x))$, donc appartient à H. Donc $f(H) \subset H$.

2. a. L'ensemble $A' = \{n_x | x \in E \setminus \{0_E\}\}$ est une partie non vide et majoré par n de $\mathbb{N}$. Il admet donc un maximum noté p qui est inférieur ou égal à n. Ce maximum est atteint en au moins un x_0.

b. La famille $(x_0, f(x_0), \ldots, f^{p-1}(x_0))$ est libre et la famille $(x_0, f(x_0), \ldots, f^{p}(x_0))$ est liée. Donc $(x_0, f(x_0), \ldots, f^{p-1}(x_0))$ est une base de $F = Vect((x_0, f(x_0), \ldots, f^{p-1}(x_0))) = Vect((x_0, f(x_0), \ldots, f^{p}(x_0)))$. Ainsi, le vecteur $-f^p(x_0)$ se décompose de manière unique sur cette base, ce qui fournit l'existence et l'unicité de coefficients $a_0, \ldots, a_p$ tels que $a_p = 1$ et $\sum_{k=0}^{p} a_k f^k(x_0) = 0_E$. On pose alors $P = \sum a_k X^k$ qui est unitaire par construction.
Si Q est un polynôme non nul de degré inférieur ou égal à $p-1$, $Q(f)(x_0) = \sum b_k f^k(x_0)$ est une combinaison linéaire des vecteurs de la famille libre $(x_0, f(x_0), \ldots, f^{p-1}(x_0))$ avec des coefficients non tous nuls. Par contraposée de la définition d'une famille libre, cette combinaison linéaire n'est pas nulle. Donc $Q(f)(x_0) \neq 0_E$.

3. a. Nous avons déjà montré plusieurs fois que $f^p(x_0) \in Vect((x_0, f(x_0), \ldots, f^{p-1}(x_0)))$. Par ailleurs, $f^{n_u}(u) \in Vect((u, f(u), \ldots, f^{n_u-1}(u))$. Donc $f^{n_u+1}(u) \in Vect(f(u), f^2(u), \ldots, f^{n_u}(u)) \subset Vect(u, f(u), \ldots, f^{n_u-1}(u))$. Par récurrence, on montrerait que pour tout $k \geq n_u$, $f^k(u) \in Vect(u, f(u), \ldots, f^{n_u-1}(u))$. Ainsi, $f^p(u) \in Vect(u, f(u), \ldots f^{p-1}(u))$ car $p \geq n_u$.
F_u est donc stable par f.

b. La famille $(x_0, f(x_0), \ldots, f^{p-1}(x_0))$ est libre. Donc $dim(F_u) \geq p$. Mais la famille $(x_0, f(x_0), \ldots, f^{p-1}(x_0), u, f(u), \ldots$ est de cardinal $2p$, donc $dim(F_u) \leq 2p$.

c. Pour définir une forme linéaire sur F_u, il suffit de définir ses valeurs sur une base de F_u. Or la famille $(x_0, f(x_0), \ldots, f^{p-1}(x_0))$ est libre. On la complète en une base β de F_u. Soit $j \in \{0, \ldots p-1\}$. Il existe une forme linéaire φ_j telle que $\varphi(f^j(x_0)) = 1$ et $\varphi(e) = 0$ pour tout autre vecteur e de β. La famille $(\varphi_j)_{j \in \{0, \ldots p-1\}}$ convient.

4. $\varphi_j(f^i(v_\lambda)) = \varphi_j(f^i(x_0 + \lambda u)) = \delta_i^j + \lambda \varphi_j(f^i(u))$. Si on note $M(x)$ la matrice composée des complexes $\varphi_j(f^i(x))$ pour $(i,j) \in \{0, \ldots, p-1\}$, on remarque que $\Delta(\lambda) = det(I_n + \lambda M(u))$. Par la formule $det(A) = \sum_{\sigma \in S_p} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{p} a_{i,\sigma(i)}$, on obtient que chaque produit $\prod_{i=1}^{p} a_{i,\sigma(i)}$ est le produit d'au plus p polynômes de degré inférieur ou égal à 1 en λ. Donc $\Delta(\lambda)$ est bien la somme de polynômes de degrés inférieurs ou égaux à λ, donc un polynôme de $\mathbb{C}_p[X]$ en λ.
De plus, $\Delta(0) = det(I_p) = 1$.

5. On applique la question **1.2** de cette partie au vecteur v_λ.

6. a. Les φ_j sont linéaires. Il suffit de composer par φ_j l'égalité de la question qui précède.

b. Si $\lambda \notin Z$, $\Delta(\lambda) \neq 0$. Notons U la matrice colonne $\begin{pmatrix} \alpha_0(\lambda) \\ \vdots \\ \alpha_{p-1}(\lambda) \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} \varphi_0(f^p(v_\lambda)) \\ \vdots \\ \varphi_{p-1}(f^p(v_\lambda)) \end{pmatrix}$.

Alors $BU = V$. De plus, $det(B) = \Delta(\lambda) \neq 0$. Donc B est inversible et $U = B^{-1}V = \dfrac{1}{det(B)} {}^t com(B) \cdot V$. Les coefficients de B sont les $\delta_i^j + \lambda\varphi_j(f^i(u))$ qui sont des polynômes en λ. Donc ceux de sa comatrice le sont également.

Donc les coefficients de U qui sont les $\alpha_k(\lambda)$ sont bien des fractions rationnelles en λ.

7. a. Soit $a_0, \dots, a_{p-1}$ complexes tels que $\sum_{k=0}^{p-1} a_k f^k(v_\lambda) = 0$. Soit $j \in [0, p-1]$. Alors en composant par φ_j qui est linéaire, $\sum_{k=0}^{p-1} a_k \varphi_j(f^k(v_\lambda)) = a_j = 0$.

La famille est donc libre.

b. Le polynôme $Q_j = \prod_{k=0 k\neq j}^{p-1} (f - \beta_k(\lambda) id_E)$ est de degré $p-1$. D'après la question 2.2. de cette partie, $Q_j(f)(v_\lambda) \neq 0_E$.

c. $P_\lambda(f)(v_\lambda) = f^p(v_\lambda) - \sum_{k=0}^{p-1} \alpha_k(\lambda) f^k(v_\lambda) = 0_E$ d'après la définition des α_k.

Or $P_\lambda(f)(v_\lambda) = \prod_{k=0}^{p-1}((f - \beta_k(\lambda) id_E)(v_\lambda) = ((f - \beta_j(\lambda) id_E) \circ Q_j(f)(v_\lambda) = (f - \beta_j(\lambda) id_E)(\circ Q_j(f)(v_\lambda)$.

Comme $\circ Q_j(f)(v_\lambda \neq 0_E$, $ker(f - \beta_j(\lambda) id_E) \neq 0_E$, donc β_j est une valeur propre de f admettant pour vecteur propre $Q_j(f)(v_\lambda \in F_{x_0}$.

8. Le spectre d'un endomorphisme en dimension finie est une partie fini de $\mathbb{C}$, donc bornée.

9. β_j est à valeur dans le spectre de $f_{F_{x_0}}$, donc bornée par M_j.

10. Notons $M = \max(M_j : j \in \{0, \dots p-1\})$.Alors $|\alpha_j| \leq M^p$

11. α_j est une fraction rationnelle bornée sur $\mathbb{C} \setminus Z$. Si $\alpha_j = \dfrac{R}{Q}$ où R et Q sont des polynômes de $\mathbb{C}[X]$ premiers entre eux, il existe une constante $M > 0$ telle que pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus Z$, $\dfrac{|R(z)|}{|Q(z)|} \leq M$.

L'inégalité est vraie pour $z \notin Z$. Soit alors $z_0 \in Z$. La fonction $|R|$ est continue en z_0 par composition de deux fonctions continues (l'une est une fonction polynomiale, l'autre la fonction module) donc admet une limite finie en z_0. De même pour la fonction $|Q|$. Au voisinage de z_0, l'inégalité est vraie. Par passage à la limite dans les inégalités, l'inégalité est encore vraie en z_0.

Si la fraction admet un pôle en z_0 alors $Q(z_0) = 0$. Comme Q et R sont premiers entre eux, R et Q n'ont pas de racines communes, donc $R(z_0) \neq 0$. Alors par théorème opératoires sur les limites, $\dfrac{|R|}{|Q|}$ tend vers $+\infty$ et n'est pas bornée au voisinage de z_0.

Par contraposition, comme $\dfrac{|R|}{|Q|}$ est bornée, Q n'admet pas de racines dans $\mathbb{C}$. Par le théorème de d'Alembert-Gauss, Q est donc constant (non nul) et R/Q est donc un polynôme.

Mais alors si ce polynôme α_j n'est pas constant, $|\alpha_j(x)|$ tend vers $+\infty$ lorsque x est réel et tend vers $+\infty$. Donc α_j n'est pas borné. Par contraposition, comme α_j est borné, α_j est constant égal à $\alpha_j(0)$.

Donc $P_\lambda = P$. Donc $P(f)(u) = 0_E$ comme demandé. Ainsi, $P(f)$ est l'endomorphisme nul et la famille $(id_E, f, \dots, f^p)$ est liée, donc a fortiori la famille $(id_E, f, \dots f^n)$.

PROBLEME 2
Stabilité du schéma explicite pour la résolution de l'équation de diffusion

1. On obtient de la relation de récurrence :

$$f_{n+1}(k) = f_n(k) + \frac{\tau}{\delta^2}(f_n(k+1) - 2f_n(k) + f_n(k-1)) = ... = (1-2r)f_n(k) + r(f_n(k+1) + f_n(k-1)).$$

Donc $AF_n = (1-2r)F_n + rB_qF_n = ... = F_{n+1}$ car $f_n(0) = f_n(q+1) = 0$.

2. Par récurrence (ne pas écrire "immédiate" et la rédiger...), $F_n = A^nF_0$ (la suite matricielle est géométrique de raison A)

3. Soit λ une valeur propre et $Y = ^t(y_1, t_2 \dots y_n)$ un vecteur propre associé. Soit $y_{i_0} = \max |y_i|$. Alors $y \neq 0$ car $Y \neq 0_E$.

Comme $B_qY = \lambda Y$, on a

— Si $i_0 = 1$, $y_2 = \lambda y_1$ donc $|\lambda| \leq \dfrac{|y_2|}{|y_1|} \leq 1$

— Si $I_0 = q$, $y_{q-1} = \lambda y_q$ donc $|\lambda| \leq \dfrac{|y_{q-1}|}{|y_q|} \leq 1$

— Sinon, $y_{i_0-1}+y_{i_0+1} = \lambda y_{i_0}$ donc $|\lambda| = \dfrac{|y_{i_0-1}+y_{i_0+1}|}{|y_{i_0}|} \leq \dfrac{|y_{i_0-1}|+|y_{i_0+1}|}{|y_{i_0}|} \leq 2$ car $|y_{i_0-1}| \leq |y_{i_0}|$ et $|y_{i_0+1}| \leq |y_{i_0}|$.

Dans tous les cas, $|\lambda| \leq 2$, donc il existe $\theta \in [0, \pi]$, $\lambda = 2\cos\theta$.

4. Vu en TD (formule de récurrence d'un déterminant d'une trigonale et formule trigo).

5. Vu en TD (idem - zéros distincts de la fonction sinus, degré du polynôme, factorisation complète...)

6. Vu en TD.

Si $Y = ^t(y_k)$ est un vecteur propre, les coordonnées vérifient $y_0 + y_2 = \lambda y_1$, $y_{q-1} + y_{q+1} = \lambda y_q$ et $y_{k-1} + y_{k+1} = \lambda y_k$ pour $k \in [1, q-1]$.

La suite (y_k) est donc récurrente linéaire d'ordre 2 d'équation caractéristique $r^2 - \lambda r + 1$ dont le discriminant est $\Delta = -4\sin^2\theta \leq 0$. Alors $y_k = A\exp(ik\theta) + B\exp(-ik\theta)$ avec $A + B = 0$ car $y_0 = 0$.

7. Vu en TD.

8. La matrice B_q admet q valeurs propres deux à deux distinctes. Son polynôme caractéristique est donc scindé à racines simples, ce qui est une condition suffisante pour que B_q soit diagonalisable.

On rappelle au passage que la somme de deux endomorphismes diagonalisables n'est pas forcément diagonalisable ! Mais ici, B_q et I_q sont diagonalisables dans une même base ! Donc $A = (1-2r)I_q + rB_q$ l'est aussi dans cette base commune.

9. Par double implication :

— Si la suite (F_n) est bornée quel que soit F_0, alors pour tout $\lambda \in Sp(A)$, si $F_0 = X_0$ où X_0 est un vecteur propre associé à λ, $F_n = \lambda^nF_0$. X_0 est non nul, donc une de ses coordonnées $x_{0,i}$ est non nulle.

Comme toutes les coordonnées de F_n sont bornées, $(\lambda^n x_{0,i})$ est une suite réelle bornée avec $x_{0,i} \neq 0$. Donc $|\lambda| \leq 1$.

— Réciproquement, si $Sp(A) \subset [-1, 1]$, alors $A = P\Delta P^{-1}$ avec $\Delta = Diag(\lambda_i)$. Alors $A^n = P\Delta^nP^{-1}$ et la plus grande valeur absolue des composantes de F_n est $\max |F_{n,i}| \leq \max |\lambda_i|^n \max |F_{0,i}| \leq \max |F_{0,i}|$. La suite (F_n) est donc bornée.

10. Comme $A = (1-2r)I + rB$, $Sp(A) = \{(1-2r) + r\lambda | \lambda \in Sp(B)\}$. Or (F_n) est bornée ssi $Sp(A) \subset [-1, 1]$.

$\forall q \in \mathbb{N}^*, Sp(A) \subset [-1, 1]$ si et seulement si$\{(1-2r) + r\lambda | \lambda \in Sp(B)\} \subset [-1, 1]$

si et seulement si$\forall q \in \mathbb{N}^*, (1-2r) + 2r\cos(\pi/(q+1)) \subset [-1, 1]$

si et seulement si$(1-2r) + 2r] - 1, 1[\subset [-1, 1]$

si et seulement si$0 \leq r \leq 1/2$.