# Un corrigé

## I — Un exemple concret

**1.** Pour $k \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{k!}(xI_n)^k = \dfrac{x^k}{k!}I_n$. Donc

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}(xI_n)^k &= \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{x^k}{k!}I_n\right) = \left(\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^k}{k!}\right) I_n \\ &= \exp(x)I_n\end{aligned}$$

**2.** Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ une matrice nilpotente d'indice inférieur ou égal à 3.
$\exp(M) = I_3 + M + \dfrac{1}{2}M^2 + 0$ car $M^k = 0$ pour $k \geqslant 3$.
On pose $P = 1 + X + \dfrac{X^2}{2}$. Alors $\exp(M) = P(M)$.

**3.** **a.** $\chi_A = \begin{vmatrix} X-4 & -1 & 1 \\ 2 & X-1 & -1 \\ -1 & 0 & X-1 \end{vmatrix}$

En faisant par exemple $C_1 \leftarrow C_1 - C_2 + C_3$, on obtient au signe près des $X-2$ sur la première colonne. Finalement, on obtient $\chi_A = (X-2)^3$

**b.** $Sp(A)$ est un singleton et $A$ n'est pas une matrice scalaire, donc $A$ n'est pas diagonalisable.

**4.** La matrice $N = A - 2I_3$ est telle que $N^3 = 0$. De plus, on vérifie par le calcul que $N^2 \neq 0$. Donc $N$ est nilpotente d'indice 3.

**5.** On pose $g = f - 2Id$ et $u_3 = (1,0,0)$. Alors $g^2(u_3) = (1,-1,1) \neq 0$

**6.** La matrice de passage $P$ de la base canonique $\beta$ vers la base $\beta'$ est égale à :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On vérifie alors que $det(P) \neq 0$ donc la famille $\beta'$ est une base.

**7.** $g(u_3) = u_2$ donc $f(u_3) - 2u_3 = u_2$. Donc $f(u_3) = 2u_3 + u_2$.
De même, $f(u_2) = 2u_2 + u_1$. Enfin, $g(u_1) = g^3(u_3) = 0$ car $g$ est nilpotente donc $f(u_1) = 2u_1$.
Ainsi,
La matrice $T$ de $f$ dans la base $\beta'$ est égale à

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Alors $A = PTP^{-1}$.

**8.** Soit $J(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$J(0)$ est nilpotente d'indice 3, donc

$$\exp(J(0)) = I_3 + J(0) + \frac{J(0)^2}{2} \text{ et } \exp(-J(0)) = I_3 - J(0) + \frac{J(0)^2}{2}.$$

Alors :

$$\begin{aligned}
\exp(J(0))\exp(-J(0)) &= (I_3 + J(0) + \frac{J(0)^2}{2})(I_3 - J(0) + \frac{J(0)^2}{2}) \\
&= I_3 + J(0) - J(0) + J(0)^2 - J(0)^2 + 0 \\
&= I_3
\end{aligned}$$

Mais il vaut mieux remarquer que $J(0)$ commute avec $-J(0)$ et donc

$$\exp(J(0))\exp(-J(0)) = \exp(0_3) = \exp(0 \cdot I_3) = e^0 I_3 = I_3.$$

**9.** $J(0)$ commute avec $\exp(J(0))$ qui est un polynôme en $J(0)$.
Comme $J(0)$ est nilpotente d'indice 3 :

$$\begin{aligned}
(J(0)\exp(J(0)))^2 &= J(0)^2(I_3 + J(0) + \frac{J(0)^2}{2})^2 \\
&= J(0)^2 + 0 \neq 0
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
(J(0)\exp(J(0)))^3 &= J(0)^3(I_3 + J(0) + \frac{J(0)^2}{2})^3 \\
&= 0
\end{aligned}$$

car $J(0)$ est nilpotente d'indice 3.

**10.** La fonction $u : x \mapsto x\exp(x)$ est définie sur $\mathbb{R}$ et $u(0) = 0$. Comme $u$ est continue et $\lim_{+\infty} u = +\infty$, par théorème des valeurs intermédiaires, il existe un réel $\mu$ tel que $\mu e^\mu = 2 \in [0, +\infty[$.

**11.**

$$\begin{aligned}
J(\mu)\exp(J(\mu)) - 2I_3 &= (\mu I_3 + J(0))\exp(\mu I_3 + J(0)) - 2I_3 \\
&= (\mu I_3 + J(0))\exp(\mu I_3)\exp(J(0)) - 2I_3 \\
&= \exp(\mu)\left(\mu I_3 + J(0))(I_3 + J(0) + \frac{J(0)^2}{2}\right) - 2I_3 \\
&= \exp(\mu)\left(\mu I_3 + (1+\mu)J(0) + J(0)^2 Q(J(0))\right) - 2I_3 \text{ où } Q \in \mathbb{C}[X] \\
&= (\mu\exp(\mu) - 2)I_3 + \exp(\mu)\left((1+\mu)J(0) + J(0)^2 Q(J(0))\right) \text{ où } Q \in \mathbb{C}[X] \\
&= \exp(\mu)\left((1+\mu)J(0) + J(0)^2 Q(J(0))\right) \text{ où } Q \in \mathbb{C}[X]
\end{aligned}$$

Remarquons alors que $\mu \neq (-1)$ car $\mu\exp(\mu) = 2$.
Alors comme à la question précédente, il est facile de vérifier que

$$\left(J(\mu)\exp(J(\mu)) - 2I_3\right)^2 \neq 0 \text{ et } \left(J(\mu)\exp(J(\mu)) - 2I_3\right)^3 = 0$$

**12.** **a.** Donc $J(\mu)\exp(J(\mu)) - 2I_3$ est nilpotente d'indice égal à 3. Soit $g$ l'endomorphisme canoniquement associé, il existe donc $u_3 \neq 0$ tel que $g^2(u_3) \neq 0$. On vérifie que $\beta' = (g^2(u_3), g(u_3), u_3)$ est une base dans laquelle la matrice de $g$ est égale à $J(0)$.

Donc $J(\mu)\exp(J(\mu)) - 2I_3$ est semblable à $J(0)$.

**b.** Il existe donc $P$ telle que $P\big(J(\mu)\exp(J(\mu)) - 2I_3\big)P^{-1} = J(0)$.

Alors $P\big(J(\mu)\exp(J(\mu))\big)P^{-1} = 2I_3 + J(0) = J(2)$.

Posons alors $M = PJ(\mu)P^{-1}$, de sorte que

$$M\exp(M) = PJ(\mu)P^{-1}P\exp(J(\mu))P^{-1} = PJ(\mu)\exp(\mu)P^{-1} = J(2).$$

## II — Préliminaire sur la représentation $ze^z$

**13.**

$$\begin{aligned} ze^z = \omega \quad &\Leftrightarrow \quad Re^{i\theta}e^{R\cos\theta + iR\sin\theta} = re^{i\alpha} \\ &\Leftrightarrow \quad Re^{R\cos\theta}e^{i(\theta + R\sin\theta)} = re^{i\alpha} \\ &\Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} Re^{R\cos\theta} & = & r \\ \theta + R\sin\theta & \equiv & \alpha[2\pi] \end{array} \right. \end{aligned}$$

**14.** **a.** Lorsque $\theta \to 0^+, (\alpha - \theta)\cdot\dfrac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} \sim \dfrac{\alpha}{\sin\theta} \to +\infty$

Lorsque $\theta \to \pi^-, (\alpha - \theta)\cdot\dfrac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} \sim -\dfrac{\alpha - \pi}{\sin\theta} \to -\infty$

**b.** Par composition des limites avec la fonction exponentielle, $\lim_{\theta\to 0^+}\varphi(\theta) = +\infty$.

Par croissances comparées, $\lim_{X\to-\infty} Xe^X = 0$ donc $\lim_{\theta\to\pi^-}\varphi(\theta) = 0$.

**c.** La fonction $\varphi$ est continue par composition de fonctions continues.

Par théorème des valeurs intermédiaires,

$$\forall r \in ]0, \pi[\subset]0, +\infty[, \exists\theta \in ]0, \pi[, \varphi(\theta) = r.$$

**d.** 0 est un antécédent de 0 par $g$.

Soit $\omega \in \mathbb{C}^*$, $\omega = re^{i\alpha}$. On cherche $z = Re^{i\theta}$ avec $R > 0$ et $\theta \in ]0, \pi[$ tels que $z\exp(z) = \omega$.

Il existe $\theta \in ]0, \pi[$ tel que $\phi(\theta) = r$ d'après la question précédente. Posons alors $R = \dfrac{\alpha - \theta}{\sin\theta}$. On vérifie que $z\exp(z) = \omega$, donc $g$ est surjective.

**15.** La fonction $g_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g_1(x) = x\exp(x)$ admet pour dérivée

$$g_1' : x \mapsto \exp(x)(1 + x)$$

qui est négative sur $]-\infty, -1[$ et positive sur $]1, +\infty[$.

Donc $g_1$ est décroissante sur $]-\infty, -1[$ de $\lim_{-\infty} g_1 = 0$ vers $g_1(-1) = -1/e < 0$ puis croissante sur $]-1, +\infty[$ de $-1/e$ vers $\lim_{+\infty} g_1 = +\infty$

Donc $g_1(\mathbb{R}) = [-1/e, +\infty[$ et $g_1$ n'est pas surjective.

## III — Représentation $Ae^A$ d'un bloc de Jordan

Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice nilpotente d'indice $n$.

**16.** $N^{n-1}$ n'est pas la matrice nulle. Donc il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ telle que $N^{n-1}X \neq 0$.

Par contre, $N^n X = 0$ car $N$ est nilpotente d'indice $n$.

Soit $\lambda_0, \ldots, \lambda_{n-1}$ tels que $\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k N^k X = 0$. Alors en multipliant par $N^{n-1}$, on obtient

$$\lambda_0 N^{n-1} X + 0 + \ldots + 0 = 0$$

Donc $\lambda_0 = 0$.

On montre ainsi successivement que $\forall k \in [0, n-1]$, $\lambda_k = 0$ et donc que la famille $(X, NX, ..., N^{n-1}X)$ est libre.

**17.** La famille $(N^{n-1}X, \ldots, NX, X)$ est donc une base de $\mathbb{C}^n$ par argument de cardinalité.

La matrice de l'endomorphisme $f$ canoniquement associé à $N$ exprimée dans cette base est égale à $J_n(0)$.

Donc $N$ est semblable à $J_n(0)$.

**18.** **a.** $J_n(0)$ et $-J_n(0)$ commutent entre elles, donc $\exp J_n(0) \exp -J_n(0) = \exp(0_n) = \exp(0 \cdot I_n) = I_n$.

On en déduit que $\exp J_n(0)$ est inversible et que $\exp -J_n(0)$ est égal à son inverse.

**b.** La matrice $J_n(0)$ est nilpotente d'indice $n$. Donc $\exp(J_n(0)$ est un polynôme en $J_n(0)$. Précisément, $\exp(J_n(0)) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} J_n(0)^k = P(J_n(0))$.

On sait que $J_n(0)$ commute avec tout polynôme en $J_n(0)$, donc comute avec $\exp(J_n(0))$.

Ainsi, $\left(J_n(0) \exp J_n(0)\right)^n = J_n(0)^n \times \exp nJ_n(0) = 0 \times \exp nJ_n(0) = 0$.

Et $\left(J_n(0)e^{J_n(0)}\right)^{n-1} = J_n(0)^{n-1} \times \exp((n-1)J_n(0))$.

La matrice $\exp((n-1)J_n(0))$ est inversible d'inverse $\exp(-(n-1)J_n(0))$, donc $\left(J_n(0)e^{J_n(0)}\right)^{n-1}$ a le même rang que $J_n(0)^{n-1}$, donc n'est pas nulle.

Finalement, $J_n(0)e^{J_n(0)}$ est nilpotente d'indice $n$.

**19.** **a.** Soit $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ inversible.

Par récurrence, on montre que $\forall k \in \mathbb{N}, (PJ_n(0)P^{-1})^k = PJ_n(0)^k P^{-1}$. Donc la matrice $PJ_n(0)P^{-1}$ est nilpotente d'indice $n$ et

$$\begin{aligned}
\exp(PJ_n(0)P^{-1}) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{PJ_n(0)P^{-1}}{k!} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} P\frac{J_n(0)}{k!}P^{-1} \\
&= P\left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{J_n(0)}{k!}\right)P^{-1} \\
&= P\exp(J_n(0))P^{-1}
\end{aligned}$$

**b.** On a vu que $J_n(0)e^{J_n(0)}$ est nilpotente d'indice $n$. Donc $J_n(0)e^{J_n(0)}$ est semblable à $J_n(0)$. Il existe donc $P$ telle que

$$\begin{aligned} J_n(0) &= PJ_n(0)e\exp(J_n(0))P^{-1} \\ &= PJ_n(0)P^{-1}P\exp(J_n(0))P^{-1} \\ &= PJ_n(0)P^{-1}\exp(PJ_n(0)P^{-1}) \\ &= \overline{N}\exp(\overline{N}) \end{aligned}$$

en posant $\overline{N} = PJ_n(0)P^{-1}$.

Soit $\lambda$ un nombre complexe non nul.

**20.** D'après la partie 2, il existe un nombre complexe $\mu \in D$, donc $\mu \neq (-1)$ tel que $\lambda = \mu e^{\mu}$. Alors

$$\begin{aligned} J_n(\mu)e^{J_n(\mu)} &= (\mu I_n + J_n(0))\exp(\mu I_n + J_n(0)) \\ &= \mu\exp(\mu)\exp(J_n(0) + J_n(0)\exp(\mu)\exp(J_n(0)) \\ &= \mu\exp(\mu)\left(I_n + J_n(0) + J_n(0)\sum_{k=2}^{n-1}\frac{J_n(0)^{k-2}}{k!}\right) + J_n(0)\exp(\mu)\left(I_n + J_n(0)\sum_{k=1}^{n-1}\frac{J_n(0)^{k-1}}{k!}\right) \\ &= \lambda I_n + (\mu+1)J_n(0) + (J_n(0))^2\left(\mu\exp(\mu)\sum_{k=2}^{n-1}\frac{J_n(0)^{k-2}}{k!} + \exp(\mu)\sum_{k=1}^{n-1}\frac{J_n(0)^{k-1}}{k!}\right) \\ &= \lambda I_n + (\mu+1)e^{\mu}J_n(0) + (J_n(0))^2P(J_n(0)) \end{aligned}$$

où $P = \left(\mu\exp(\mu)\sum_{k=2}^{n-1}\frac{X^{k-2}}{k!} + \exp(\mu)\sum_{k=1}^{n-1}\frac{X^{k-1}}{k!}\right)$ qui est un polynôme à cœfficients complexes.

**21.** **a.** Les matrices $J_n(0)$ et $(J_n(0))^2P(J_n(0))$ commutent. On pose $A = J_n(0)\Bigg((\mu+1)e^{\mu}I_N +$ $J_n(0)P(J_n(0))$ de sorte que :

$$\begin{aligned} A^n &= J_n(0)^n\left((\mu+1)e^{\mu}I_N + J_n(0)P(J_n(0))\right)^n \\ &= 0_n \end{aligned}$$

Donc $A$ est nilpotente d'indice inférieur ou égal à $n$.

**b.** Soit $R$ le reste de la division euclidienne de $X^{n-1}((\mu+1)e^{\mu} + XP)^{n-1}$ par le polynôme $X^n$. Alors $X^{n-1}((\mu+1)e^{\mu} + XP)^{n-1} = QX^n + R$.
En substituant $J_n(0)$, on obtient : $J_n(0)^{n-1}((\mu+1)e^{\mu} + J_n(0)P)^{n-1} = A^{n-1} = 0 + R(J_n(0))$ car $J_n(0)$ est nilpotente d'indice $n$.

**c.**

$$\begin{aligned} X^{n-1}((\mu+1)e^{\mu} + XP)^{n-1} &= X^{n-1}\left((\mu+1)^{n-1}e^{(n-1)\mu} + XQ_1\right) \\ &= X^nQ_2 + (\mu+1)^{n-1}e^{(n-1)\mu}X^{n-1} \end{aligned}$$

Par unicité du reste dans une division euclidienne,
$R = (\mu+1)^{n-1}e^{(n-1)\mu}X^{n-1}$ Donc $A^{n-1} = R = (\mu+1)^{n-1}e^{(n-1)\mu}J_n(0)^{n-1} \neq 0$ car $J_n(0)$ est nilpotente d'indice égal à $n$ et $\mu + 1 \neq 0$.

Finalement, $A$ est nilpotente d'indice égal à $n$.

**d.** $A$ est donc semblable à $J_n(0)$, donc il existe $P_1$ inversible telle que $A = (\mu+1)e^{\mu} J_n(0) + J_n(0)P(J_n(0)) = P_1 J_n(0) P_1^{-1}$.

Mais

$$\begin{aligned} J_n(\mu)\exp(J_n(\mu)) &= \lambda I_n + A = \lambda I_n + P_1 J_n(0) P_1^{-1} \\ &= P_1(\lambda I_N + J_N(0))P_1^{-1} \\ &= P_1 J_n(\lambda) P_1^{-1} \end{aligned}$$

Finalement,

$$\begin{aligned} J_n(\lambda) &= P_1^{-1} J_n(\mu)\exp(J_n(\mu))P_1 \\ &= P_1^{-1} J_n(\mu) P_1 P_1^{-1} \exp(J_n(\mu)) P_1 \\ &= P_1^{-1} J_n(\mu) P_1 \exp(P_1^{-1} J_n(\mu) P_1) \\ &= M \exp(M) \end{aligned}$$

En posant $M = P_1^{-1} J_n P_1$.