DEVOIR SURVEILLÉ n° 2 (4H)

Vendredi 11 octobre 2019

Représentation matricielle Ae^A

Soit n un entier naturel non nul et $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à cœfficients complexes. On note I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Une matrice N de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est dite *nilpotente d'indice* p si p est le plus petit entier strictement positif pour lequel $N^p = 0$.

Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on appelle exponentielle de A, et on note $\exp(A)$, la matrice $\exp(A) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}$.

On admet que si deux matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$,

$$AB = BA \Rightarrow \exp(A + B) = \exp(A) \times \exp(B).$$

On admet également que si $P \in GL_n(\mathbb{C})$ et si $A = PBP^{-1}$, alors $\exp(A) = P\exp(B)P^{-1}$.

I — Un exemple concret

1. On rappelle que pour $x \in \mathbb{C}, \exp(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$.

Montrer que pour $x \in \mathbb{C}$, $\exp(xI_3) = \exp(x)I_3$.

2. Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ une matrice nilpotente d'indice inférieur ou égal à 3.

Justifier que $\exp(M) = P(M)$ où $P \in \mathbb{C}_2[X]$. Préciser le polynôme P.

Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{C}^3$ canoniquement associé à A.

3. **a.** Calculer le polynôme caractéristique de A.

b. (question bonus hors barème) La matrice A est-elle diagonalisable ?

4. Que dire de la matrice $N = A - 2I_3$?

5. On pose $g = f - 2Id$. Vérifier que $u_3 = (1, 0, 0)$ n'appartient pas au noyau $\ker g^2$.

6. On pose alors $u_2 = g(u_3)$ et $u_1 = g(u_2)$. Vérifier que $\beta' = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{C}^3$.

Déterminer la matrice de passage P de la base canonique β vers la base β'.

7. Exprimer la matrice T de f dans la base β' (on pourra utiliser les égalités reliant u_3, u_2 et u_1) et rappeler la formule de changement de bases reliant T, A et P.

8. Soit $J(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

Calculer $\exp(J(0))$ et $\exp(-J(0))$. Vérifier que $\exp(J(0))\exp(-J(0)) = I_3$.

9. Vérifier que $(J(0)\exp(J(0)))^2 \neq 0$ et $(J(0)\exp(J(0)))^3 = 0$.

10. Justifier l'existence d'un réel μ tel que $\mu e^{\mu} = 2$

11. Vérifier que $(J(\mu)\exp(J(\mu)) - 2I_3)^3 = 0$ et $(J(\mu)\exp(J(\mu)) - 2I_3)^2 \neq 0$.

12. **a.** Montrer que $J(\mu)\exp(J(\mu)) - 2I_3$ est semblable à $J(0)$.

b. En déduire l'existence d'une matrice M telle que $M\exp(M) = J(2)$.

c. En déduire finalement l'existence d'une matrice A' telle que $A'\exp(A') = A$.

La suite du problème propose de généraliser ce résultat.
On appelle *bloc de Jordan d'ordre* n associé au nombre complexe λ, la matrice

$$J_n(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Si n et p sont deux entiers naturels non nuls on note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$ l'espace vectoriel des matrices à cœfficients complexes comportant n lignes et p colonnes. On notera indifféremment $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$ ou $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
Le but du problème est de montrer la surjectivité de la fonction

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \\ A & \mapsto & A\exp(A). \end{array}$$

II — Préliminaire sur la représentation ze^z

13. Soit r et R des nombres réels strictement positifs, α et θ des nombres réels. On note $\omega = re^{i\alpha}$ et $z = Re^{i\theta}$. Montrer que l'équation $ze^z = \omega$ équivalente au système :

$$\begin{cases} Re^{R\cos\theta} = r \\ R\sin\theta \equiv (\alpha - \theta) \ [2\pi]. \end{cases}$$

On choisit dorénavant le réel α dans l'intervalle $[2\pi, 4\pi[$. Soit alors φ l'application de $[0, \pi[$ dans $\mathbb{R}$ définie par la formule :

$$\varphi(\theta) = \frac{\alpha - \theta}{\sin\theta} e^{\left((\alpha-\theta)\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)}$$

14. **a.** Déterminer les limites de $(\alpha - \theta) \cdot \dfrac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}$ lorsque $\theta \to 0^+$ puis lorsque $\theta \to \pi^-$

b. En déduire soigneusement les limites de $\varphi(\theta)$ lorsque $\theta \to 0^+$ et lorsque $\theta \to \pi^-$.

c. Que peut-on en déduire sur l'ensemble des solutions de l'équation $\varphi(\theta) = r$ pour $r > 0$ fixé.
Soit $D = \{Re^{i\theta} | R > 0 \text{ et } 0 < \theta < \pi\} \cup \{0\}$ et l'application de D dans $\mathbb{C}$ définie par $g(z) = ze^z$.

d. Déduire de ce qui précède que g est surjective.

15. La fonction $g_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g_1(x) = x\exp(x)$ est-elle surjective ?

III — Représentation Ae^A d'un bloc de Jordan

Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice nilpotente d'indice n.

16. Montrer qu'il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ telle que $N^{n-1}X \neq 0$ et que la famille $(X, NX, ..., N^{n-1}X)$ est libre.

17. En déduire que N est semblable à $J_n(0)$.

18. **a.** Montrer que $e^{J_n(0)}$ est inversible.

b. Montrer que $J_n(0)e^{J_n(0)} = e^{J_n(0)}J_n(0)$ puis que $J_n(0)e^{J_n(0)}$ est nilpotente d'indice n.

19. **a.** Montrer que si $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est inversible, on a $Pe^{J_n(0)}P^{-1} = e^{PJ_n(0)P^{-1}}$.

b. En déduire qu'il existe $\overline{N} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $J_n(0) = \overline{N}e^{\overline{N}}$.

Soit λ un nombre complexe non nul.

20. Justifier l'existence d'un nombre complexe $\mu \neq -1$ tel que $\lambda = \mu e^{\mu}$ et montrer que l'on peut écrire :

$$J_n(\mu)e^{J_n(\mu)} = \lambda I_n + (\mu+1)e^{\mu}J_n(0) + (J_n(0))^2 P(J_n(0))$$

où P est un polynôme à cœfficients complexes qui dépend de μ.

21. **a.** Montrer que $A = (\mu+1)e^{\mu}J_n(0) + (J_n(0))^2P(J_n(0))$ est nilpotente d'indice inférieur ou égal à n.

b. Soit R le reste de la division euclidienne de $X^{n-1}((\mu+1)e^{\mu} + XP)^{n-1}$ par le polynôme X^n. Justifier que $A^{n-1} = R(J_n(0))$.

c. Déterminer R et conclure que A est nilpotente d'indice égal à n.

d. En déduire qu'il existe $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $J_n(\lambda) = Me^M$.

IV — Forme de Jordan d'une matrice nilpotente

Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice nilpotente d'ordre p. On suppose dans un premier temps que $1 < p < n$.

22. Montrer qu'il existe $B \in \mathcal{M}_{p,n-p}(\mathbb{C})$ et $C \in \mathcal{M}_{n-p,n-p}(\mathbb{C})$ telles que N est semblable à la matrice par blocs suivante :

$$A = \left(\begin{array}{c|c} J_p(0) & B \\ \hline O & C \end{array}\right)$$

où O est la matrice nulle de $\mathcal{M}_{n-p,p}(\mathbb{C})$.

Pour tout $X \in \mathcal{M}_{p,n-p}(\mathbb{C})$, on définit la matrice par blocs T_X suivante :

$$T_X = \left(\begin{array}{c|c} I_p & X \\ \hline O & I_{n-p} \end{array}\right) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$$

23. **a.** Soient $X, Y \in \mathcal{M}_{p,n-p}(\mathbb{C})$. Vérifier que $T_X T_Y = T_{X+Y}$.

b. Montrer que T_X est inversible et calculer son inverse.

c. Vérifier que $A' = T_X A T_X^{-1}$ est de la forme :

$$A' = \left(\begin{array}{c|c} J_p(0) & Y \\ \hline O & Z \end{array}\right)$$

où l'on explicitera les matrices $Y \in \mathcal{M}_{p,n-p}(\mathbb{C})$ et $Z \in \mathcal{M}_{n-p,n-p}(\mathbb{C})$.

24. Montrer que dans l'écriture de A' de la question précédente, on peut choisir $X \in \mathcal{M}_{p,n-p}(\mathbb{C})$ de telle sorte que toutes lignes de Y, à l'exception éventuelle de la dernière, soient nulles. (On pourra noter $X_{(i)}$ la ième ligne de X pour $i \in \{1, ..., p\}$ et étudier l'effet sur les lignes de X de la multiplication par $J_p(0)$ dans le produit $J_p(0)X$.)

25. Justifier que A' est nilpotente d'indice p. En déduire que si la matrice X est choisie comme dans la question précédente, la matrice Y est nulle. (On pourra raisonner par l'absurde en étudiant l'effet des endomorphismes associés aux puissances de A' sur les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{C}^n$.)

26. En déduire, par un raisonnement par récurrence forte, que lorsque $1 \leq p \leq n$, la matrice nilpotente N est semblable à une matrice diagonale par blocs de la forme :

$$\begin{pmatrix} J_{p_1}(0) & & & (0) \\ & J_{p_2}(0) & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & J_{p_r}(0) \end{pmatrix}$$

où r et $p_1, ..., p_r$ désignent des entiers naturels non nuls.

V — Représentation Ae^A

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On note $\lambda_1, ..., \lambda_s$ ses valeurs propres complexes distinctes, d'ordre de multiplicité respectifs $\alpha_1, ..., \alpha_s$ dans le polynôme caractéristique de A. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{C}^n$ est A et F_i le sous espace vectoriel de $\mathbb{C}^n$ définie par $F_i = \ker((f - \lambda_i)^{\alpha_i})$ pour tout $i \in \{1, ..., s\}$.
On rappelle le lemme des noyaux : si $P_1, \ldots P_k$ sont des polynômes 2 à 2 premiers entre eux, alors

$$\ker((\prod_{i=1}^{k} P_i)(f)) = \oplus_{i=1}^{k} \ker(P_i(f)).$$

27. Montrer que l'espace vectoriel $\mathbb{C}^n$ est la somme directe des espaces F_i. En considérant une base de $\mathbb{C}^n$ adaptée à cette somme directe, montrer que A est semblable à une matrice diagonale par blocs da la forme :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 I_{\alpha_1} + N_1 & & & (0) \\ & \lambda_1 I_{\alpha_2} + N_2 & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & \lambda_s I_{\alpha_s} + N_s \end{pmatrix}$$

où $N_1, ..., N_s$ sont des matrices nilpotentes.

28. Montrer que l'application $A \mapsto Ae^A$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dans lui même est surjective.

FIN DU PROBLÈME