# Devoir surveillé 2

Vendredi 12 octobre 2018
L'usage des calculatrices n'est pas autorisé

*Vous attacherez la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction, même si tout résultat qui n'est pas explicitement dans le cours de MPSI ou de MP doit être démontré. Si vous repèrez ce qui semble être une erreur d'énoncé, signalez le sur votre copie et poursuivez votre composition en expliquant les raisons des initiatives que vous avez été amené à prendre.*

**Consignes à respecter sous peine d'être pénalisé :**

- Utiliser des copies doubles.
- Changer de feuille/copie à chaque exercice ou partie d'un problème.
- Faire clairement apparaître le numéro (et le cas échéant la partie) de la question traitée.
- Souligner les résultats intermédiaires dans une démonstration à tiroirs.
- Faire une phrase de conclusion répondant clairement à la/les question(s) posées, et encadrer le résultat.

## PROBLEME 1

Dans ce problème, $\mathbb{C}$ désigne le corps des nombres complexes, $E$ un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, non nécessairement de dimension finie et $\mathcal{L}(E)$ l'algèbre des endomorphismes de $E$.
Pour tout $g \in \mathcal{L}(E)$, on pose $g^0 = id_E$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $g^k$ désigne le composé de $k$ endomorphismes égaux à $g$. Un endomorphisme de $E$ de la forme $\lambda id_E$ avec $\lambda \in \mathbb{C}$, est dit une homothéthie.
On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ l'algèbre des matrices carrées d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ à coefficients dans $\mathbb{C}$ ; la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ se notera $I_n$. Une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est dite *scalaire* si elle est de la forme $\lambda I_n$ avec $\lambda \in \mathbb{C}$.
$\mathbb{C}[X]$ désigne l'algèbre des polynômes à coefficients complexes et, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{C}_p[X]$ est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}[X]$ formé des polynômes de degré inférieur ou égal à $p$.
L'objet de ce problème est d'établir le résultat suivant dû à Aupetit en 1988 :
*Si $f$ est un endomorphisme d'un espace vectoriel complexe $E$ pour lequel il existe un entier $n \geq 1$ tel que, pour tout $u \in E$, la famille $(u, f(u), \ldots, f^n(u))$ est liée, alors la famille $(id_E, f, \ldots f^n)$ d'éléments de $\mathcal{L}(E)$, est liée.*

## Partie 1 : étude d'un cas déjà vu en cours...

Soit $f$ un endomorphisme de $E$.

**1.** Dans cette section, on suppose que pour tout vecteur $u \in E$, la famille $(u, f(u))$ est liée.

**a.** Démontrer que pour tout $x \in E \setminus \{0_E\}$, il existe un unique $\lambda_x \in \mathbb{C}$ tel que $f(x) = \lambda_x x$.

**b.** Soit $(x, y) \in (E \setminus \{0\})^2$ ; démontrer que si la famille $(x, y)$ est liée, alors $\lambda_x = \lambda_y$.

**c.** Soit $(x, y) \in (E \setminus \{0\})^2$ ; démontrer que si la famille $(x, y)$ est libre, alors $\lambda_x = \lambda_y$.

**d.** En déduire alors que $f$ est une homothétie ; en particulier, la famille $(id_E, f)$ est liée.

**Quelques applications**

**2.** Montrer que si $f$ laisse stables toutes les droites vectorielles de $E$, alors $f$ est une homothétie.

**3.** Montrer que si $E$ est de dimension finie $\geq 3$ et si $f$ laisse stables tous les plans vectoriels de $E$, alors $f$ est une homothétie.

**4.** On suppose ici que $f$ n'est pas une homothétie et que $E$ est de dimension finie $p \geq 2$.

**a.** Justifier qu'il existe $x_0 \in E$ tel que la famille $(x_0, f(x_0))$ soit libre.

**b.** Justifier l'existence d'une famille $(e_3, \dots e_p)$ d'éléments de $E$ telle que la famille $(x_0, f(x_0), e_3, \dots, e_p)$ soit une base de $E$.

**c.** On désigne par $s$ la symétrie vectorielle de $E$ par rapport au sous-espace vectoriel $F = \mathbb{C}x_0$, engendré par $x_0$, parallèlement au sous espace vectoriel $G = Vect(\{f(x_0), e_3 \dots e_p\})$.
Montrer que $s \circ f \neq f \circ s$.

**5.** On suppose encore que $E$ est de dimension finie $p \geq 2$. Déduire de ce qui précède que si $f \circ g = g \circ f$ pour tout $g \in \mathcal{L}(E)$, alors $f$ est une homothétie.

**6.** **Traduction matricielle :** soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ pour $p \geq 2$. Montrer que $A$ est une matrice scalaire si et seulement si $AM = MA$ pour tout $M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$.

**7.** Montrer que si $E$ est de dimension finie et si $f$ laisse stables tous les hyperplans de $E$, alors $f$ est une homothétie.

## Partie 2 : étude du cas général

On se donne ici un endomorphisme $f$ de $E$ pour lequel il existe un entier $n \geq 2$ tel que pour tout $u \in E$, $(u, f(u), \dots f^n(u))$ est liée.

**1.** Soit $x \in E \setminus \{0_E\}$.

**a.** Montrer qu'il existe un unique $n_x \in \{1, \dots, n\}$ tel que la famille $(x, f(x), \dots, f^{n_x-1}(x))$ soit libre et la famille $(x, f(x), \dots, f^{n_x}(x))$ soit liée.

**b.** Montrer que le sous-espace vectoriel $H = Vect(x, f(x), \dots, f^{n_x-1}(x))$ est stable par $f$.

**2.** On pose $p = \max\limits_{x \in E \setminus \{0_E\}} \{n_x\}$.

**a.** Justifier que $p$ est bien défini, que $p \leq n$ et qu'il existe $x_0 \in E \setminus \{0_E\}$ tel que la famille $(x_0, f(x_0), \dots, f^{p-1}(x_0))$ soit libre et la famille $(x_0, f(x_0), \dots, f^p(x_0))$ soit liée.

**b.** Montrer qu'il existe un unique polynôme unitaire $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré $p$ tel que $P(f)(x_0) = 0_E$ et justifier que $Q(f)(x_0) \neq 0_E$, pour tout polynôme nul de $\mathbb{C}_{p-1}[X]$.

Dans la suite, un tel couple $(P, x_0)$ est choisi.

On va établir que $P(f) = 0$ et donc que la famille $(id_E, f, \dots f^p)$ est liée, donc a fortiori la famille $(id_E, f, \dots f^n)$ l'est aussi car $p \leq n$.

Pour cela, on considère $u \in E \setminus \{0_E\}$ et on cherche à montrer que $P(f)(u) = 0_E$.

**3.** On pose $F_u = Vect(x_0, f(x_0), \dots, f^{p-1}(x_0), u, f(u), \dots, f^{p-1}(u))$.
On pose $v_\lambda = x_0 + \lambda u$ pour tout complexe $\lambda$. Alors $\forall \lambda \in \mathbb{C}, v_\lambda \in F_u$.

**a.** Montrer que le sous espace vectoriel $F_u$ est stable par $f$.

**b.** Montrer que le sous espace vectoriel $F_u$ est de dimension finie comprise entre $p$ et $2p$.

**c.** Montrer qu'il existe une famille $(\varphi_0, \dots, \varphi_{p-1})$ de formes linéaires sur $F_u$ telle que pour tout couple $(i, j)$ d'éléments de $\{0, \dots p-1\}$, $\varphi_j(f^i(x_0))$ est égal à 0 si $i \neq j$ et à 1 si $i = j$.

Dans la suite, on note $\Delta(\lambda)$ le déterminant de la matrice $\left(\varphi_j(f^i(v_\lambda))\right)_{0 \leq i,j \leq p-1} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$.

**4.** Justifier que $\Delta(\lambda)$ est un polynôme en $\lambda$ de degré inférieur ou égal à $p$ et que $\Delta(0) = 1$.

**5.** Justifier que pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, il existe une famille $(\alpha_0(\lambda), \ldots, \alpha_{p-1}(\lambda))$ de complexes tels que

$$f^p(v_\lambda) = \sum_{k=0}^{p-1} \alpha_k(\lambda) f^k(v_\lambda).$$

**6.** On dispose ainsi de $p$ applications $\alpha_0, \ldots, \alpha_{p-1}$ qui sont des fonctions complexes de la variable complexe.

**a.** Justifier que pour tout complexe $\lambda$, les scalaires $\alpha_0(\lambda), \ldots, \alpha_{p-1}(\lambda)$ vérifient le système d'équations linéaires :

$$\varphi_j(f^p(v_\lambda)) = \sum_{k=0}^{p-1} \alpha_k(\lambda) \varphi_j\left(f^k(v_\lambda)\right), 0 \leq j \leq p-1.$$

**b.** On note $Z$ l'ensemble des racines complexes du polynôme $\Delta$. Déduire de ce qui précède que les restrictions à $\mathbb{C} \setminus Z$ des fonctions $\alpha_0, \ldots \alpha_{p-1}$ sont des fractions rationnelles.

**7.** On considère le polynôme $P_\lambda = X^p - \sum_{k=0}^{p-1} \alpha_k(\lambda) X^k$ et on note $\beta_0(\lambda), \ldots, \beta_{p-1}(\lambda)$ ses racines complexes, chacune d'elles étant répétée autant de fois que son ordre de multiplicité. On a donc $P_\lambda = \prod_{k=0}^{p-1} (X - \beta_k(\lambda))$.

**a.** Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{C} \setminus Z$, la famille $(v_\lambda, f(v_\lambda), \ldots f^{p-1}(v_\lambda))$ est libre.

**b.** Soit $j \in \{0, \ldots p-1\}$ et $Q_j = \prod_{k=0, k \neq j}^{p-1} (X - \beta_k(\lambda))$. Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{C} \setminus Z$,

$$Q_j(f)(v_\lambda) \neq 0_E.$$

**c.** Montrer alors que pour tout $j \in \{0, \ldots p-1\}$ et tout $\lambda \in \mathbb{C} \setminus Z, \beta_j(\lambda)$ est une valeur propre de $f_{F_u}$, l'endomorphisme de $F_u$ induit par $f$.

**8.** Justifier que le spectre d'un endomorphisme d'un espace de dimension finie est une partie borné de $\mathbb{C}$.

**9.** En déduire que pour tout $j \in \{0, \ldots p-1\}$, la fonction $\beta_j : \mathbb{C} \setminus Z \to \mathbb{C}$ est bornée.

**10.** On admet que les relations coefficients-racines du polynôme $P_\lambda$ permettent d'obtenir les égalités :

$$\forall k \in \{0, \ldots p\}, \alpha_{p-k} = (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq p-1} \beta_{i_1} \cdots \beta_{i_k}.$$

En déduire que toutes les fonctions $\alpha_j$ sont bornées sur $\mathbb{C} \setminus Z$.

**11.** On rappelle que les fonctions $\alpha_j$ sont des fractions rationnelles de $\mathbb{C} \setminus Z$ dans $\mathbb{C}$.
En déduire rigoureusement que les fonctions $\alpha_i$ sont nécessairement constantes et en conclure que la famille $(id_E, f, \ldots f^n)$ est liée.

Tourner la page S.V.P.

## PROBLEME 2
## Stabilité du schéma explicite pour la résolution de l'équation de diffusion

Ce problème étudie, du point de vue numérique, un certain problème de diffusion.
On fixe une fonction $f$, continue sur $\mathbb{R}_+ \times [0,1]$ et de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^* \times ]0,1[$, vérifiant l'équation de diffusion $\forall (t,x) \in \mathbb{R}_+^* \times ]0,1[, \dfrac{\partial f}{\partial t}(t,x) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,x)$ ainsi que les conditions aux limites $\forall t \in \mathbb{R}_+, f(t,0) = f(t,1) = 0$.
Soit $\tau$ un réel strictement positif et $q$ un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On pose $\delta = \dfrac{1}{q+1}$ et $r = \dfrac{\tau}{\delta^2}$.
La méthode numérique retenue consiste à discrétiser $t$ selon le pas $\tau$ et $x$ selon le pas $\delta$, ce qui amène à chercher une valeur approchée de $f(n\tau, k\delta)$, notée $f_n(k)$, pour $n \in \mathbb{N}$ et $k \in [0, q+1]$.
On peut montrer que l'équation de diffusion et les conditions aux limites conduisent à imposer, pour tout entier naturel $n$ et tout $k \in [1,q]$, $\dfrac{f_{n+1}(k) - f_n(k)}{\tau} = \dfrac{f_n(k+1) - 2f_n(k) + f_n(k-1)}{\delta^2}$ ainsi que $f_n(0) = f_n(q+1) = 0$ et $f_0(k) = f(0, k\delta)$.
(on suppose que la fonction $f(0,\cdot)$ est supposée connue)

Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $F_n = \begin{pmatrix} f_n(1) \\ \vdots \\ f_n(q) \end{pmatrix}$ et $B_q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_q(\mathbb{R})$.

On note $I_q$ la matrice identité d'ordre $q$.
Enfin, on pose $A_q = (1-2r)I_q + rB_q$.

**1.** Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_{n+1} = A_q F_n$.

**2.** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_n = A_q^n F_0$.

Soit $\lambda$ une valeur propre de $B_q$ et soit $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_q \end{pmatrix}$ un vecteur propre associé.

**3.** Montrer que, si on impose $y_0 = y_{q+1} = 0$, alors, pour tout $k \in [1,q]$, $y_{k-1} - \lambda y_k + y_{k+1} = 0$.

**4.** En considérant un coefficient de $Y$ dont la valeur absolue est maximale, montrer que $\lambda \in [-2, 2]$ et justifier l'existence d'un élément $\theta$ de $[0, \pi]$, tel que $\lambda = 2\cos\theta$.

**5.** Soit $\theta \in ]0, \pi[$. Montrer à l'aide d'une récurrence double sur $q \geq 1$ que $\chi_{B_q}(2\cos\theta) = \dfrac{\sin((q+1)\theta)}{\sin\theta}$.

**6.** En déduire qu'il existe $j \in [1, q]$ tel que $\lambda = 2\cos\left(\dfrac{j\pi}{q+1}\right)$.

**7.** Déterminer le spectre de $B_q$ et une base de vecteurs propres de $B_q$.

**8.** Justifier que les matrices $B_q$ et $A_q$ sont diagonalisables. dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

**9.** Montrer que la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée quel que soit le choix de $F_0$ et pour tout $q \geq 1$ si et seulement si les valeurs propres de $A_q$ appartiennent à $[-1, 1]$.

**10.** Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur $r$ pour que la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit bornée quel que soit le choix de $F_0$ et pour tout $q \in \mathbb{N}^*$.

On dit alors que le schéma numérique retenu est stable.