DS 2 : 4h

Vendredi 13 octobre 2017
L'usage des calculatrices n'est pas autorisé

L'étudiant attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction, même si tout résultat qui n'est pas explicitement dans le cours de MPSI ou de MP doit être démontré. Si un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Consignes à respecter sous peine d'être pénalisé :

- Changer de copie (ou au moins de feuille) à chaque exercice ou partie d'un problème.
- Faire clairement apparaître le numéro (et le cas échéant la partie) de la question traitée.
- Faire apparaître toutes les étapes **importantes** d'un calcul et la propriété/définition/caractérisation utilisée pour passer à la ligne suivante.
- Souligner les résultats intermédiaires dans une démonstration à tiroirs.
- Faire une phrase de conclusion répondant clairement à la/les question(s) posées, et encadrer le résultat.

Questions de cours :

1. Soient $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n$.
Le déterminant de Vandermonde associé aux a_i est : $V(a_1, \dots, a_n) = \det(A)$ où les coefficients de A sont tels que $a_{i,j} = a_i^{j-1}$.

a. Calculer et factoriser $V(a, b)$ et $V(a, b, c)$.

b. Montrer que les polynômes $V(a_1, \dots, a_{n-1}, X)$ et $V(a_1, \dots, a_{n-1}) \displaystyle\prod_{i=1}^{n-1}(X - a_i)$ sont égaux.

c. En déduire rigoureusement que $V(a_1, \dots, a_n) = \displaystyle\prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)$.

2. Donner l'exemple d'une matrice non diagonalisable dont le polynôme caractéristique est scindé.

3. a. Rappeler la définition du polynôme minimal d'un endomorphisme (on précisera la condition d'existence).

b. Justifier rapidement que tout endomorphisme en dimension finie admet un polynôme minimal.

c. Donner l'exemple d'un endomorphisme n'ayant pas de polynôme minimal.

4. Préciser les polynômes minimaux d'une projection non triviale et d'une symétrie non triviale (on ne demande pas de démonstration)

5. Soit A une matrice carrée et P un polynôme.

a. Montrer rigoureusement que si $AX = \lambda X$, alors $P(A) \cdot X = P(\lambda) \cdot X$.

b. En déduire que si P est un polynôme annulateur de A, le spectre de A est inclus dans l'ensemble des racines de P.

6. Soit M diagonalisable.

a. Justifier que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, M^p est diagonalisable.

b. Donner l'exemple d'une matrice M telle que M^2 est diagonalisable, mais M ne l'est pas.

Exercice :

On note $\mathbb{R}[X]$ la $\mathbb{R}-$algèbre des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$.
Pour tout polynôme P, on note P' son polynôme dérivé.
Étant donné un entier naturel n, on note $[\![0, n]\!]$ l'ensemble des entiers naturels compris entre 0 et n et $\mathbb{R}_n[X]$ le $\mathbb{R}-$espace vectoriel des polynômes de degré $\leqslant n$.
Soit l'application :

$$\varphi \ : \ \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & P - P' \end{array} \right.$$

1. Démontrer que φ induit sur $\mathbb{R}_n[X]$ un endomorphisme.
On note φ_n cet endomorphisme.

2. Expliciter la matrice de φ_n sur la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

3. **a.** Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de φ_n.

b. L'endomorphisme φ_n est-il diagonalisable ?

4. Démontrer que φ_n est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

5. En déduire qu'il existe une unique famille de polynômes $s_0, s_1, \ldots, s_n$ telle que :
- $\forall i \in [0, n], \ \varphi_n(s_i) = \frac{X^i}{i!}$,
- $(s_0, s_1, \ldots, s_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

On note id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}_n[X]$ et δ l'endomorphisme induit par la dérivation sur le $\mathbb{R}-$espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$.

6. Montrer que :

$$(\mathrm{id} - \delta) \circ (\mathrm{id} + \delta + \cdots + \delta^n) = \mathrm{id}$$

7. En déduire l'expression de s_i en fonction de X, pour tout i dans $[\![0, n]\!]$.

Problème :

On note pour n entier $n \geq 2$, $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients complexes. On notera $1 \leq i, j \leq n$ pour indiquer que $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq n$.

Préliminaires :

Si M est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on admet que la suite de matrices $(E_p)_{p \in \mathbb{N}}$ où

$$E_p = \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!} M^k = I_n + M + \frac{1}{2!} M^2 + \cdots + \frac{1}{p!} M^p$$

est convergente, c'est à dire que pour tout $1 \leq i, j \leq n$, la suite des coefficients $e_{i,j,p}$ se trouvant à la place (i, j) dans la matrice E_p converge vers un complexe noté $e_{i,j,\infty}$.
On note $\exp(M) = (e_{i,j,\infty})_{1 \leq i,j \leq n}$ la matrice obtenue en passant à la limite les coefficients. Cette matrice est appelée l'exponentielle de la matrice M. On écrit alors $\exp(M) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} M^k = \lim_{p \to +\infty} E_p$.

On admet que les fonctions

$$\exp \ : \ \left\{ \begin{array}{rcl} \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \\ A & \longmapsto & \exp(A) \end{array} \right. \quad \text{et pour } P \in GL_n(\mathbb{C}); \phi_P \ : \ \left\{ \begin{array}{rcl} \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \\ A & \longmapsto & PAP^{-1} \end{array} \right.$$

sont continues, c'est à dire que pour une suite de matrices carrées $(A_p)_{p \in \mathbb{N}}$ et une matrice carrée A :

$$\text{si } \lim_{p \to +\infty} A_p = A \text{ alors } \lim_{p \to +\infty} \exp(A_p) = \exp(A) \text{ et } \lim_{p \to +\infty} P A_p P^{-1} = PAP^{-1}.$$

On rappelle et on peut utiliser librement que pour tout **complexe** z, $\exp(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!}$.

1. Soit $M_0 = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$. Rappeler la valeur de M_0^k pour tout entier $k \geq 0$ et en déduire $\exp(M_0)$.

2. Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $M_1 = \begin{pmatrix} 0 & \theta \\ \theta & 0 \end{pmatrix}$.

a. Déterminer la valeur de M_1^k pour tout entier $k \geq 0$ en discutant de la valeur de k modulo 2.

b. En partant de la série exponentielle, montrer que $\operatorname{ch}\theta = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\theta^{2k}}{(2k)!}$

c. Donner une formule similaire pour $\operatorname{sh}\theta$.

d. Donner une expression de $\exp(M_1)$ en fonction de $\operatorname{ch}\theta$ et $\operatorname{sh}\theta$.

3. Soit T une matrice triangulaire supérieure de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dont les éléments diagonaux sont $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

a. En détaillant les calculs d'un coefficient situé sur la diagonale et d'un coefficient situé strictement sous la diagonale, montrer que T^k est une matrice triangulaire supérieure dont on précisera les éléments diagonaux.

b. En déduire que $\exp(T)$ est triangulaire supérieure et préciser ses éléments diagonaux.

c. Soit M une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

i. Rappeler pourquoi M est trigonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

ii. Déterminer rigoureusement une relation entre $\det(\exp(M))$ et $\exp(\operatorname{Tr}(M))$.

4. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & -6 \\ -1 & -9 & 11 \\ 0 & -5 & 7 \end{pmatrix}$.

a. Donner le déterminant de la matrice A.

b. En déduire qu'il n'existe aucune matrice B à coefficients **réels** telle que $B^2 = A$ et qu'il n'existe aucune matrice M à coefficients **réels** vérifiant $\exp(M) = A$.

Partie 1

On notera F l'espace vectoriel sur le corps $\mathbb{C}$ des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ combinaisons linéaires d'applications du type $x \mapsto x^k \left(\rho e^{i\theta}\right)^x = x^k \rho^x \exp(i\theta x)$ où $k \in \{0, 1, 2\}$, $\rho \in]0, +\infty[$ et $\theta \in]0, 2\pi]$.
On rappelle que pour $\rho \in]0, +\infty]$, $\rho^x = \exp(x \ln \rho)$.

1. a. Soit $f_0 : x \mapsto \exp(i\frac{\pi}{2}x)$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer $f_0(n)$ en fonction de i et n.

b. Déterminer un élément f de F vérifiant pour tout entier naturel n, $f(n) = \alpha(-3)^n + \beta n^2 2^n$ si α et β sont deux constantes complexes.

c. Si f est un élément de F et si x_0 est un réel, expliquer pourquoi $x \mapsto f(x + x_0)$ est encore un élément de F.

2. a. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Démontrer que la suite de nombres complexes $\left(n^2 (\frac{2}{3})^n e^{i\theta n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.

b. Soit $(k_1, k_2) \in \{0, 1, 2\}^2, (\rho_1, \rho_2) \in]0, +\infty[^2, (\theta_1, \theta_2) \in]0, 2\pi]^2$ et

$$f_1(x) = x^{k_1} \rho_1^x \exp(i\theta_1 x), f_2(x) = x^{k_2} \rho_2^x \exp(i\theta_2 x).$$

Montrer que si $\theta_1 \neq \theta_2$, alors la famille (f_1, f_2) est libre.
On pourra par exemple, supposer $\rho_1 \leq \rho_2$ et commencer par examiner les cas $\rho_1 < \rho_2$ et $\rho_1 = \rho_2$.

c. i. Soit $f \in F$. Montrer que si n, $\forall n \in N, f(n) = 0$, alors f est l'application nulle.

ii. Que peut-on dire de deux applications f et g de F vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}, f(n) = g(n)$?

Dans la suite de cette partie, A est une matrice inversible de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

3. Justifier l'existence de 9 applications $\omega_{i,j}$ éléments de F telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, A^n = (\omega_{i,j}(n))_{1 \leq i,j \leq 3}.$$

On ne demande pas de résoudre des systèmes, une explication de la méthode pourra suffire.

4. On pose pour tout réel t, la matrice $\gamma(t) = (\omega_{i,j}(t))_{1 \leq i,j \leq 3} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

a. Quelles sont les matrices $\gamma(0)$ et $\gamma(1)$?

b. Justifier que pour tout couple d'entiers naturels (n, m), on a la relation : $\gamma(n+m) = \gamma(n)\gamma(m)$.

Pour x réel et m entier naturel, on pose $f(x) = \omega_{i,j}(x+m)$ et $g(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{3} \omega_{i,k}(x)\omega_{k,j}(m)$.

c. Démontrer que l'on a $f = g$ et en déduire que $\forall m \in \mathbb{N}, \gamma(x+m) = \gamma(x)\gamma(m)$.

d. En déduire que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \gamma(x+y) = \gamma(x)\gamma(y).$$

5. Démontrer que $\gamma(-1) = A^{-1}$ et que pour tout entier naturel p non nul, $(\gamma(1/p))^p = A$.

6. Justifier que chaque fonction $x \mapsto x^k \rho^x \exp(i\theta x)$ est dérivable et préciser sa dérivée. En déduire que $\omega_{i,j}$ est dérivable.

On note $\omega'_{i,j}$ la dérivée de $\omega_{i,j}$.

On admet que l'application γ définie pour tout réel t par $\gamma(t) = (\omega_{i,j}(t))_{1 \leq i,j \leq 3}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on pose $\forall t \in \mathbb{R}, \gamma'(t) = (\omega'_{i,j}(t))_{1 \leq i,j \leq n}$.

7. Montrer que la fonction γ est une solution de l'équation différentielle $u'(t) = \gamma'(0)u(t)$ vérifiant $u(0) = I_3$ où la fonction inconnue u vérifie pour tout réel t, $u(t) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

On admet qu'on peut en déduire que $\exp(\gamma'(0)) = A$.

8. **BILAN :** En utilisant les différents résultats du problème répondez aux questions suivantes en argumentant :

a. la fonction $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est-elle surjective ?

b. la fonction $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ est-elle surjective ?

c. l'image de $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$ contient-elle $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$?

Partie 2 : exemple

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Donner le polynôme caractéristique de la matrice A.

2. La matrice A est-elle diagonalisable ?

3. En utilisant le théorème de division euclidienne, déterminer 9 fonctions $\omega_{i,j}(n) \in F$ telles que $A^n = (\omega_{i,j}(n))_{1 \leq i,j \leq n}$.

4. En déduire :

a. La matrice A^{-1}.

b. Une matrice $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ telle que $B^2 = A$.

c. Une matrice $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ telle que $\exp(M) = A$.