Devoir surveillé 1

Rapport (commentaires, félicitations et réprimandes...)

Conseils généraux :

- *prendre le temps de lire le devoir en entier pour en estimer la longueur.*
- *se faire un rapide programme de répartition du temps (4h) sur les différentes parties.*
- *SOIGNER particulièrement la présentation et la rédaction sur les premières copies doubles. En gros, si cela vous semble adéquat, vous pouvez passer à la vitesse supérieure au bout d'une heure de travail.*
- *BIEN LIRE (plusieurs fois) les premières questions d'un problème contenant plusieurs parties : souvent des petits détails nous échappent lorsqu'on ne connait pas les difficultés du thème abordé. Ils prennent tous leur sens lorsqu'au détour d'une question, on s'aperçoit que ce n'est pas aussi simple qu'on le pensait.*
- *ne pas hésiter à changer de partie MAIS ne pas papillonner pour autant ! Vous devez trouver un équilibre stable et satisfaisant pour le correcteur entre "je dois enchaîner les questions les unes après les autres" et "je dois grapiller des points sur les questions que je sais traiter".*

Exercice - Questions de cours

Une moyenne générale de 3,06/5 : pas mal, mais on ne doit pas s'en satisfaire !

1. *Parmi les erreurs courantes :* $(\mathbb{C}, \times)$ *n'est pas un groupe car 0 n'est pas inversible,* $(\mathbb{U}_n, +)$ *non plus car la somme de deux racines n-ièmes n'a aucune raison d'être une racine n-ième,* $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \times)$ *non plus car la matrice nulle n'admet pas d'inversible,* $(GL_n(\mathbb{R}), +)$ *n'est pas stable par somme !*

2. *On demande que les applications soient des morphismes de groupes : il serait préférable que les couples* $(\ldots, \ldots)$ *soient des groupes !*

Parmi les erreurs courantes, pour un nombre non négligeable d'étudiants, il y aurait une formule pour le déterminant de la somme... et une formule pour $exp(zz')$*...*

3. *Félicitations à Océane qui est la seule à avoir vu* $SL_n(\mathbb{C})$ *comme le noyau du morphisme* $\det : GL_n(\mathbb{C}) \to C^*$ *cité dans la question précédente ! Les autres perdent des 1/4 de points car il ne répondent pas correctement à la question "En déduire"...*

4. *Les peu qui n'ont rien tenté devraient avoir honte... Mais rares sont ceux qui ont écrit sans faute/coquille : "l'ensemble* $\{deg(P) | P \in I \setminus \{0\}\}$ *est une partie non vide de* $\mathbb{N}$*, donc minorée par un entier* $d_0 \geq 0$*."*

5. *R.A.S.*

6. $\varphi(n)$ *n'est pas défini comme étant égal à* $\sum_{d|n} \varphi(d)$*... mais, par exemple, comme le nombre de générateurs de* $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ *(on accepte les nombres d'entiers de* $[1, n-1]$ *premiers avec* n *ou le nombre d'inversibles modulo n.*

Dans la formule d'Euler, rares sont ceux qui ont écrit sans se tromper : $\mathcal{O}(x) | Ordre((\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*)$*...*

7. *Félicitations à tous : vous avez bien mieux compris que ceux de l'an dernier !*

Exercice : Polynômes de Tchebychev

1. *Il est souvent justifié que* $\cos(n\theta)$ *est la partie réelle de* $(\cos\theta + i\sin\theta)^n$*. Par contre, personne à part Florent - qu'on félicite - n'a eu le courage de faire un binôme de Newton et penser à écrire* $\sin^2 = 1 - \cos^2$*... La formule est compliquée, mais c'est un classique à savoir faire !*
2. *Vous pensez souvent à montrer que si* P_1 *et* P_2 *conviennent, alors* $P_1 - P_2$ *admet une infinité de racines, mais peu précisent que ces racines sont par exemple toutes les valeurs de* $\cos\theta$ *pour* θ *réel, c'est à dire les réels de* $[-1, 1]$.
3. *Presque personne n'aborde la question. Seul Jasmin trouve une réponse correcte. La lecture de la question suivante suggérait pourtant une méthode "sans calcul"...*
4. *Il en existe encore qui ne savent pas dériver une composée...*
5. *OK pour les formules trigo. Par contre, il faut penser à remplacer* $\cos\theta$ *par* X *pour obtenir la formule de récurrence...*
6. *Ceux qui ont fait la question précédente DOIVENT faire la moitié de cette question !*

Problème

Partie I

1. *On peut se contenter de montrer que c'est un sous-anneau de* $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$*, mais NE PAS oublier de vérifier que* $I_2 \in A$*...*
2. **a.** R.A.S.

   b. *Ici, beaucoup oublient de faire un petit commentaire sur le fait qu'une matrice de* $GL_2(\mathbb{Z})$ *est à coefficients entiers, inversible et dont l'inverse est aussi à coefficients entiers par hypothèse... C'est donc l'énoncé qui nous assure que l'ensemble est stable par symétrique.*

   c. *Ici encore, on utilise que* A^{-1} *est à coefficients entiers. Donc* $\det(A) \in \mathbb{Z}$, $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)} \in \mathbb{Z}$*... C'est ce qui impose que* $\det(A) = \pm 1$*. Beaucoup racontent des bêtises et passent sans justification de* $\det(A) \neq 0$ *à* $\det(A) = \pm 1$.
3. **a.** *Noyau ? Morphisme ?... question de cours ?*

   b. *R.A.S.*

   c. *Vous avez presque tous remarqué l'inversion entre* c_0 *et* d_0*. C'est bien. Par contre, la méthode de résolution par analyse synthèse d'une équation diophantienne du type* $ax + by = c$ *avec* a *et* b *premiers entre eux du cours d'arithmétique de MPSI est à revoir. En particulier, il faut justifier que c'est le même entier* k *qui apparait dans le couple de solutions.*

   d. *Vous remarquez le lien avec la question précédente, mais certains oublient d'étudier le cas* $ad - bc = -1$*. Manque de rigueur regrettable.*

   e. *On ne répond pas à une question sans en donner une démonstration ! Dire que* a *et* b *sont premiers entre eux n'est pas suffisant : pour montrer qu'une condition est nécessaire et suffisante, il faut faire une démonstration par équivalence (ici, c'est possible) ou par double implication : c'est le raisonnement qui rapporte des points, pas la condition !*

Partie II

1. **a.** *R.A.S.*

b. *Pas mal ont remarqué que 1 n'était pas forcément dans le réseau. Mais il faut penser à donner un contre exemple concret (ex : $\alpha = 2$ et $\beta = i$)*

c. *Beaucoup de confusion ici : certains n'ont pas bien compris la question ! Il s'agit de montrer que si on a affaire à une "mauvaise" base du réseau (α, β), il est toujours possible d'en choisir une autre telle que $\frac{\alpha}{\beta} \in \mathcal{H}$. Une fois le problème bien posé, il y a de nombreuses solutions possibles : on peut aussi faire un dessin, comprendre ce que veut dire $\frac{\alpha}{\beta} \in \mathcal{H}$...*

d. *Technique, mais assez bien réussi dans l'ensemble. Ceux qui n'ont pas terminé le calcul doivent retravailler la quantité conjuguée d'un nombre complexe.*

2. a. *Question un poil plus difficile. Mais en expérimentant sur son brouillon, on doit comprendre le lien entre le fait de changer de base et utiliser une matrice de $SL_2(\mathbb{Z})$...*

b. *La réciproque est vraie, et bien sûr, il faut le démontrer. Alors que pense le correcteur d'une copie en lisant simplement les quatre mots : "la réciproque est fausse" ?*

3. *Ceux qui ont lu la question on fait le rapprochement avec la question I.3.c. Une question qui teste la mémoire à long terme sur une épreuve de 4h. Une lecture attentive en début d'épreuve pourrait être intéressante à ce niveau.*

4. *Seul Jasmin trouve une réponse.*

Partie III

1. a. *OK pour ceux qui se souviennent des calculs précédents.*

b. *Pour cette question et les suivantes, ceux qui écrivent des choses qui ont du sens et qui ne font pas d'erreur de "typage" des objets manipulés avancent sans difficulté.*

Si vous n'y êtes pas arrivé, c'est que vous n'avez pas remarqué que Φ est une application de $SL_2(\mathbb{Z})$ dans une ensemble d'applications (homographies) de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{H}$. Donc $\Phi(A)$ est une application, pas un complexe. $\Phi(A) \circ \Phi(A')$ est la COMPOSITION de deux applications. Pour trouver son expression, on écrit $\Phi(A)(z)$ et on substitue à z l'expression de $\Phi(A')(z)$.

c. *Voir question au dessus : souvent les mêmes erreurs de "typage".*

d. *Il faut montrer que $\pm I_2$ sont les seules solutions et pas seulement vérifier que ces matrices sont solutions ! Nuance !*

e. i. $\emptyset$

ii. *R.A.S*

2. a. *Félicitations à ceux qui sont arrivés jusqu'à cette question et qui trouvent encore l'énergie d'en faire quelque chose. Les étudiants fatiguent psychologiquement lorsqu'ils arrivent aux dernières questions d'un devoir, alors qu'elles ne sont pas forcément les plus difficiles. Ne pas hésiter à aller jeter un coup d'oeil lorsqu'il ne reste plus qu'une demi-heure.*

b. *Gabin y est presque arrivé. Une petite erreur de signe, mais l'intention était bonne !*

••• FIN •••
