DS 10 (3H) 14H-17H

20 Mars 2020 (objectif 20/20...)
L'usage des calculatrices n'est pas autorisé

Consignes pour rendre la copie :

— *scanner ou photographier chaque page,*

— *assembler les images dans un même pdf,*

— *REDUIRE la taille du pdf à moins de 10Mo, (combien font $30Mo \times 27$ étudiants ?)*
Il me semble par exemple que le site SCEI vous expliquait comment procéder lorsque vous avez envoyé vos documents d'inscription.

— *Nommer le pdf : NOM-Prénom.pdf*

— *l'objet du mail doit être ; DS10-Nom-Prénom*

Peu m'importe si la copie arrive à 17h ou 20h, mais pour me faciliter la vie, **prenez le temps** *de respecter ces étapes scrupuleusement !*
Merci d'avance et bon courage !

Problème

L'objet de ce problème est l'étude dans différents contextes de la convergence et parfois de la valeur de la somme d'une série de terme général $\dfrac{\varepsilon_n}{n}$ où, pour tout entier naturel n non nul, ε_n vaut 1 ou -1.

Partie 1 : quelques cas déterministes .

1. Justifier que la série $\sum \dfrac{(-1)^n}{n}$ est convergente.

2. On suppose dans cette question que pour tout entier naturel n,

$$\varepsilon_{3n+1} = \varepsilon_{3n+2} = 1 \text{ et } \varepsilon_{3n+3} = (-1).$$

Quelle est la nature de la série $\sum \dfrac{\varepsilon_n}{n}$?

3. On suppose dans cette question que pour tout entier naturel n,

$$\varepsilon_{4n+1} = \varepsilon_{4n+2} = 1 \text{ et } \varepsilon_{4n+3} = \varepsilon_{4n+4} = (-1).$$

a. Prouver pour tout entier naturel N, l'égalité :

$$\sum_{n=0}^{N} \left(\frac{1}{4n+1} - \frac{1}{4n+3} \right) = \int_0^1 \frac{1 - x^{4N+4}}{1+x^2} \mathrm{d}x.$$

b. En déduire l'égalité $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{4n+1} - \frac{1}{4n+3} \right) = \frac{\pi}{4}$.

c. Calculer de même la somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{4n+2} - \frac{1}{4n+4} \right)$ et en déduire que la série $\sum \dfrac{\varepsilon_n}{n}$ est convergente avec $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\varepsilon_n}{n} = \frac{\pi}{4} + \frac{\ln 2}{2}$.

Partie 2 : le cas général périodique.

On admet et on pourra utiliser le théorème de ABEL-LITTLEWOOD :

Théorème :

Soit f une fonction développable en série entière sur l'intervalle $]-1,1[$.
On écrit alors pour $x \in]-1,1[, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.
Si $a_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$, alors la fonction f admet une limite finie lorsque x tend vers 1 par valeurs inférieures si et seulement si la série $\sum a_n$ converge.

Soit alors p entier naturel non nul, on considère une suite $(\varepsilon_n)_{n\geqslant 1}$ périodique de période p formée d'éléments de l'ensemble $\{-1,1\}$.

4. Déterminer les rayons de convergence des séries entières $\sum_{n=1}^{+\infty} \varepsilon_n x^{n-1}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\varepsilon_n}{n} x^n$.

On pose pour $x \in]-1,1[$: $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\varepsilon_n}{n} x^n$ et $g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \varepsilon_n x^{n-1}$.

5. Établir que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\varepsilon_n}{n}$ converge si et seulement si la fonction $h : x \mapsto \int_0^x g(t)\mathrm{d}t$ admet une limite finie lorsque x tend vers 1 par valeurs inférieures.

6. Montrer que g est une fraction rationnelle à déterminer.

7. Retrouver, uniquement par les deux questions précédentes, que la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ diverge et que la série alternée $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ converge en précisant sa somme.

8. Déterminer une condition nécessaire et suffisante portant sur la somme $\sum_{i=1}^{p} \varepsilon_i$ pour que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\varepsilon_n}{n}$ converge.

9. Que peut-on en conclure dans les cas où la période p est un entier impair ?

Partie 3 : un cas aléatoire.

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. On rappelle que Ω est l'univers des possibles ω, que $\mathcal{A}$ est la tribu des événements et que $\mathbb{P}$ est une probabilité définie sur $\mathcal{A}$.
On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires réelles discrètes, toutes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, **mutuellement indépendantes** et toutes de **même loi** que X_1. On suppose que la loi de la variable X_1 est donnée par :

$$\mathbb{P}([X_1 = (-1)]) = \mathbb{P}([X_1 = 1]) = \frac{1}{2}.$$

On pose pour tout entier naturel n non nul, $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{X_k}{k}$.
On note alors $\mathcal{C}$ l'ensemble des $\omega \in \Omega$ tels que la suite $(S_n(\omega))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.

A : la convergence presque sûre.

On **admet** qu'une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge si et seulement si elle vérifie la propriété suivante :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^*, \forall (n,p) \in \mathbb{N}^2, (n \geqslant N \text{ et } p \geqslant N \Rightarrow |u_p - u_n| \leqslant \varepsilon).$$

10. On pose pour tout $\varepsilon > 0$, $B(\varepsilon) = \bigcup_{N=1}^{+\infty} \left(\bigcap_{n\geqslant N, p\geqslant N} [|S_p - S_n| \leqslant \varepsilon] \right)$.

a. i. Justifier que, pour tout $\varepsilon > 0$, $B(\varepsilon)$ est un événement, c'est à dire que $B(\varepsilon) \in \mathcal{A}$.

ii. Établir l'égalité $\mathcal{C} = \bigcap_{\varepsilon>0} B(\varepsilon)$.

iii. Comparer les ensembles $B(\varepsilon)$ et $B(\varepsilon')$ quand $0 < \varepsilon < \varepsilon'$.

iv. Établir l'égalité : $\mathcal{C} = \bigcap_{k=1}^{+\infty} B(1/k)$ et en déduire que $\mathcal{C}$ est un événement, c'est à dire que $\mathcal{C} \in \mathcal{A}$.

11. **a.** Montrer que $\mathbb{P}(\mathcal{C}) = 1$ si et seulement si pour tout entier naturel k non nul,

$$\mathbb{P}\left(B(1/k)\right) = 1.$$

b. En déduire que $\mathbb{P}(\mathcal{C}) = 1$ si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{N=1}^{+\infty} \bigcup_{n,p\geqslant N} [|S_p - S_n| > \varepsilon]\right) = 0.$$

c. Montrer que $\mathbb{P}(\mathcal{C}) = 1$ si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{N\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{n,p\geqslant N} [|S_p - S_n| > \varepsilon]\right) = 0.$$

12. **a.** Prouver, pour tout entier naturel N non nul, l'inclusion :

$$\bigcup_{n,p\geqslant N} [|S_p - S_n| > \varepsilon] \subset \bigcup_{p>N} \left[|S_p - S_N| > \frac{\varepsilon}{2}\right].$$

b. En déduire que si pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{N\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{p>N} [|S_p - S_N| > \varepsilon]\right) = 0,$$

alors $\mathbb{P}(\mathcal{C}) = 1$.

B : une inégalité et le résultat.

Quand une variable aléatoire U définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ admet une espérance, on note $\mathbb{E}(U)$ sa valeur.
On rappelle que si $U_1, U_2, \ldots, U_n$ sont des variables aléatoires **mutuellement indépendantes** et **d'espérances nulles** et admettant un moment d'ordre deux, alors :

$$\forall (i,j) \in \{1, \ldots n\}^2, i \neq j \Rightarrow \mathbb{E}(U_i U_j) = \mathbb{E}(U_i)\mathbb{E}(U_j) = 0 \text{ et par conséquent : } \mathbb{E}\left(\left(\sum_{i=1}^{n} U_i\right)^2\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(U_i^2).$$

Soit $\varepsilon > 0$ et N un entier naturel non nul. On note T_N l'application qui à chaque $\omega \in \Omega$ associe l'élément de $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ défini par :

$$T_N(\omega) = \inf\left\{p \in \mathbb{N}^* : p > N \text{ et } |S_p(\omega) - S_N(\omega)| > \varepsilon\right\}.$$

(avec la convention $\inf \emptyset = +\infty$).
On rappelle que si $A \subset \Omega$ est un événement, on note $\mathbf{1}_A$ définie sur Ω la variable aléatoire telle que $\mathbf{1}_A(\omega) = 1$ si $\omega \in A$ et $\mathbf{1}_A(\omega) = 0$ sinon.

13. Soit A un événement. Établir l'égalité $\mathbb{E}(\mathbf{1}_A) = \mathbb{P}(A)$.

14. Exprimer pour tout entier $k > N$, l'ensemble $[T_N = k]$ à l'aide d'événements liés à différentes variables aléatoires S_i et en déduire que l'application T_N est une variable aléatoire.

15. **a.** Prouver, pour tout entier $k > N$, l'inégalité : $\mathbb{E}\left((S_k - S_N)^2 \mathbf{1}_{[T_N=k]}\right) \geqslant \varepsilon^2 \mathbb{P}([T_N = k])$.

b. Soit $p > N$. Justifier, pour tout $k \in [N+1, p]$, l'indépendance des variables $S_p - S_k$ et $(S_k - S_N)\mathbf{1}_{[T_N=k]}$.

c. En déduire pour tout $(p, k) \in \mathbb{N}^2$, vérifiant $N < k \leqslant p$ l'inégalité :

$$\mathbb{E}\left((S_p - S_N)^2 \mathbf{1}_{[T_N=k]}\right) \geqslant \varepsilon^2 \sum_{k=N+1}^{p} \mathbb{P}([T_N = k]).$$

16. Établir l'inégalité :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{p>N} [|S_p - S_N| > \varepsilon]\right) \leqslant \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{i=N+1}^{+\infty} \mathbb{E}\left(\left(\frac{X_i}{i}\right)^2\right).$$

17. Montrer que, presque sûrement, la série $\sum \frac{X_n}{n}$ converge, c'est à dire que l'ensemble des $\omega \in \Omega$ pour lesquels la série $\sum \frac{X_n(\omega)}{n}$ converge est de probabilité 1.

Correction DS 9

Problème

1. La suite $(1/n)$ est décroissante vers 0. Le critère spécial des séries alternées assure que la série $\sum \dfrac{(-1)^n}{n}$ est convergente.

2. Pour $n \geqslant 1$, $\dfrac{1}{3n+1} + \dfrac{1}{3n+2} - \dfrac{1}{3n+3} \geqslant \dfrac{1}{3n+1}$ car $\dfrac{1}{3n+2} - \dfrac{1}{3n+3} \geqslant 0$.

Donc la suite extraite $v_{3N} = \displaystyle\sum_{n=1}^{3N} \frac{\varepsilon_n}{n} \geqslant \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{3k+1} = u_N$.

Or la suite $(u_N)_{N\in\mathbb{N}}$ est divergente par critère de Riemann des séries numériques.

Par théorème des gendarmes, la suite $(v_{3N})_{N\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$ donc la suite $(v_N)_{N\in\mathbb{N}}$ est divergente.

3. **a.** Soit $N \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{4n+1} - \frac{1}{4n+3} &= \sum_{n=0}^{N} \int_0^1 (t^{4n} - t^{4n+2})\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \sum_{n=0}^{N} (1-t^2)\cdot t^4)n \\
&= \int_0^1 (1-t^2)\frac{1-t^{4(N+1)}}{1-t^4}\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \frac{1-t^{4(N+1)}}{1+t^2}\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

b. Lorsque N tend vers $+\infty$, pour $t \in [0,1]$, $f_N(t) = \dfrac{1-t^{4(N+1)}}{1-t^2} \to \dfrac{1}{1+t^2}$.

La suite de fonction (f_n) converge donc simplement vers la fonction $f : t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2}$ sur le segment $[0,1]$.

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, et tout $t \in [0,1]$, $|f_n(t)| = \dfrac{1-t^{4n+4}}{1+t^2}| \leqslant 2 = \phi(t)$.

La fonction ϕ est continue (par morceaux) sur le segment $[0,1]$ et intégrable.

D'après le théorème de convergence dominée, $\displaystyle\int_0^1 f_n \to_{n\to+\infty} \int_0^1 f = [\arctan(x)]_0^1 = \pi/4$.

c. En reprenant les calculs, on obtient :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{4n+2} - \frac{1}{4n+4} &= \sum_{n=0}^{N} \int_0^1 (t^{4n+1} - t^{4n+3})\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \sum_{n=0}^{N} t(1-t^2)\frac{1-t^{4(N+1)}}{1-t^4}\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \frac{t-t^{4(N+2)}}{1+t^2}\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

La suite de fonctions $g_n : t \mapsto \dfrac{t-t^{4(N+2)}}{1+t^2}$ converge simplement vers la fonction $g : t \mapsto \dfrac{t}{1+t^2}$ sur le segment $[0,1]$. On peut encore majorer g_n par ϕ. Le théorème de convergence dominée s'applique à nouveau et en intervertissant les symboles limite et intégrale, on obtient que :

$$\int_0^1 g_n \to_{n\to+\infty} \int_0^1 g = \frac{1}{2}[\ln(1+x^2)]_0^1 = \frac{\ln 2}{2}.$$

Partie 2

Partie 3

Partie A

1. **a.** i. Soit n et p dans $\mathbb{N}$.

La fonction S_n est une variable aléatoire réelle discrète car s'est une somme finie de variables aléatoires (les Y_i). La fonction S_p également.

D'après un théorème du cours, par combinaison linéaire de v.a.r.d, la fonction $S_n - S_p$ est une variable aléatoire réelle discrète.

D'après un autre théorème du cours, la composition de la v.a.r.d $S_n - S_p$ avec la fonction valeur absolue $|.|$ est une variable aléatoire réelle discrète.

Soit alors $\varepsilon > 0$. Chaque ensemble préimage $A_{n,p} = [|S_n - S_p| \leqslant \varepsilon]$ est un événement de l'univers Ω car $|S_n - S_p|$ est une variable aléatoire réelle.

L'ensemble $\mathcal{A}$ des événements de Ω est stable par intersection au plus dénombrable. Donc chaque $B_N = \bigcap_{n,p\geqslant N} A_{n,p}$ est un événement (donc dans $\mathcal{A}$).

Enfin l'ensemble $\mathcal{A}$ des événements de Ω est stable par union au plus dénombrable. Finalement, $\bigcup_{N\in\mathbb{N}} B_N$ est un événement (donc dans $\mathcal{A}$).

ii. D'après le résultat admis dans l'énoncé (critère de Cauchy d'une suite réelle convergente),

$$\begin{aligned}
\mathcal{C} &= \{\omega \in \Omega | \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^*, \forall n,p \geqslant N, |S_n - S_p|(\omega) \leqslant \varepsilon\} \\
&= \{\omega \in \Omega | \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^*, \omega \in \textstyle\bigcap_{n,p\geqslant N} A_{n,p}\} \\
&= \{\omega \in \Omega | \forall \varepsilon > 0, \omega \in \textstyle\bigcup_{N\geqslant 1}\bigcap_{n,p\geqslant N} A_{n,p}\} \\
&= \{\omega \in \Omega | \forall \varepsilon > 0, \omega \in B(\varepsilon)\} \\
&= \textstyle\bigcap_{\varepsilon>0} B(\varepsilon)
\end{aligned}.$$

iii. Soient $0 < \varepsilon < \varepsilon'$. Si $\omega \in B(\varepsilon)$, il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall n,p \geqslant N, |S_n - S_p|(\omega) \leqslant \varepsilon$.

Donc, a fortiori, $\forall n,p \geqslant N, |S_n - S_p|(\omega) \leqslant \varepsilon'$, donc $\omega \in B(\varepsilon')$.

Donc $B(\varepsilon) \subset B(\varepsilon')$.

iv. Si $1 \leqslant k' \leqslant k$, alors $0 < \dfrac{1}{k} \leqslant \dfrac{1}{k'}$ et $B(1/k) \subset B(1/k')$. La suite $(B(1/k))_{k\in\mathbb{N}^*}$ est donc décroissante.

Si $\varepsilon > 0$, il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $B(1/k) \subset B(\varepsilon)$. Donc $B(1/k) \subset \bigcap_{\varepsilon\geqslant 1/k} B(\varepsilon)$.

Ainsi, $\bigcap_{k\geqslant 1} B(1/k) \subset \bigcap_{k\geqslant 1}\bigcap_{\varepsilon>1/k} B(\varepsilon) = \bigcap_{\varepsilon>0} B(\varepsilon)$ donc $\bigcap_{k\geqslant 1} B(1/k) \subset \mathcal{C}$.

L'inclusion réciproque est aussi vraie car tout élément $1/k$ apparaît dans l'intersection $\bigcap_{\varepsilon>0} B(\varepsilon)$ donc $\mathcal{C} = \bigcap_{\varepsilon>0} B(\varepsilon) \subset \bigcap_{k\in\mathbb{N}^*} B(1/k)$.

Finalement $\mathcal{C} = \bigcap_{k\geqslant 1} B(1/k)$ qui est donc une intersection dénombrable d'événements, donc un événement. Ainsi $\mathcal{C} \in \mathcal{A}$.

2. **a.** Par croissance d'une fonction probabilité, comme $\mathcal{C} \subset B(1/k)$, nécessairement $1 = \mathbb{P}(\mathcal{C}) = 1 \leqslant \mathbb{P}(B(1/k))$. Donc $\mathbb{P}(B(1/k)) = 1$.

Réciproquement, si chaque événement $B(1/k)$ est presque certain, alors l'intersection dénombrable des $B(1/k)$ est encore presque certain, donc de probabilité égale à 1.

b. Chaque événement $B(1/k)$ est presque certain si et seulement si son complémentaire est négligeable, c'est à dire de probabilité nulle.

D'après les lois de Morgan, $\mathbb{P}(\mathcal{C}) = 1$ si et seulement si $\mathbb{P}\left(\bigcap_{N\geqslant 1}\bigcup_{n,p\geqslant N}[|S_n - S_p| > \varepsilon]\right) = 0$.

c. Par théorème de la limite monotone, la limite de la question c) est égale) la probabilité de la question b)...

3. **a.** Si l'événement $[|S_p - S_n| > \varepsilon]$ est réalisé, alors $|S_p - S_N|$ ou bien $|S_n - S_N|$ est strictement plus grand que $\varepsilon/2$ par inégalité triangulaire. Il existe donc un rang $k > N$ tel que $|S_k - S_N| > \varepsilon/2$.

Donc $\bigcup_{n,p\geqslant N}[|S_p - S_n| > \varepsilon] \subset \bigcup_{k>N}[|S_k - S_N| > \varepsilon/2]$. Donc il existe au moins une valeur $p > N$ telle que $|S_p(\omega) - S_N(\omega)| > \varepsilon/2$.

D'où le résultat.

b. Soit $\varepsilon > 0$. La suite $D_N = \bigcup_{n,p\geqslant N}[|S_n - S_p| > \varepsilon]$ est une suite décroissante d'événements. Par théorème de la limite monotone, $\lim_{N\to+\infty} D_N = \mathbb{P}\left(\bigcap_{N\geqslant 1}\bigcup_{n,p\geqslant N}[|S_n - S_p| > \varepsilon]\right)$ d'où le résultat demandé.

Partie B

1. L'univers image $1_A(\Omega) = \{0, 1\}$. La famille $(x\mathbb{P}_{1_A}(\{x\}))_{x\in 1_A(\Omega)}$ est donc finie (de cardinal 2) donc sommable. La fonction 1_A admet une espérance et $\mathbb{E}(1_A) = 0 + 1 \cdot \mathbb{P}_{1_A}(\{1\}) = \mathbb{P}(A)$

2. L'ensemble $[T_N = k]$ est réalisé ssi $\forall i \in [N + 1, k], |S_i - S_N| \leqslant \varepsilon$ et $|S_k - S_N| > \varepsilon$.

Donc $[T_N = k] = \bigcap_{i\in[N+1,k-1]}[|S_i - S_N| \leqslant \varepsilon] \bigcap [|S_k - S_N| > \varepsilon]$.

De plus $T_N(\Omega) = [N + 1, +\infty]$. D'après ce qui précède, chaque préimage $[T_N = k]$ est l'intersection finie d'événements, donc est un événement : $[T_N = k] \in \mathcal{A}$.

Enfin, $[T_N = +\infty] = \bigcap_{i\geqslant N+1}[|S_i - S_N| \leqslant \varepsilon]$ est une intersection dénombrable d'événements, donc un événement : $[T_N = +\infty] \in \mathcal{A}$.

Finalement, la fonction T_N est bien une variable aléatoire réelle discrète.

3. **a.** Soit $k > N$. Soit $\omega \in \Omega$.

$$(S_k - S_N)^2 \cdot 1_{T_N=k}(\omega) = \begin{cases} (S_k - S_N)^2 & \text{si } T_N(\omega) = k \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$(S_k - S_N)^2 \cdot 1_{T_N=k}(\omega) \geqslant \begin{cases} \varepsilon^2 & \text{si } T_N(\omega) = k \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Donc, par croissance de l'intégrale,

$\mathbb{E}((S_k - S_N)^2 \cdot 1_{T_N=k}) \geqslant \mathbb{E}(\varepsilon^2 1_{T_N=k}) = \varepsilon^2 \cdot \mathbb{E}(1_{T_N=k}) = \varepsilon^2\mathbb{P}([T_N = k])$ d'après **1**.

b. La famille $(Y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une famille de v.a.r mutuellement indépendantes.

La fonction $S_p - S_k = \sum_{i=k+1}^{p} Y_i$ est construite à partir de la famille $(Y_i)_{i\in[k+1,p]}$.

La fonction $(S_k - S_N) \cdot 1_{T_N=k}$ est construite à partir de la famille $(Y_j)_{j=[N+1,k]}$ (d'après **2**).

Les familles des (Y_i) et des (Y_j) citées précédemment sont indexées par des indices i et j appartenant à deux supports $[k + 1, p]$ et $[N + 1, k]$ d'intersection vide. Donc les v.a.r sont indépendantes.

c.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}((S_p - S_N)^2 \cdot 1_{T_N=k}) &= \mathbb{E}((S_p - S_k + S_k - S_N)^2 \cdot 1_{T_N=k}) \\ &= \mathbb{E}((S_p - S_k)^2 \cdot 1_{T_N=k} + 2(S_p - S_k)(S_k - S_N) \cdot 1_{T_N=k} + (S_k - S_N)^2 \cdot 1_{T_N=k}) \\ &= \mathbb{E}((S_p - S_k)^2 \cdot 1_{T_N=k}) + 2\mathbb{E}((S_p - S_k)(S_k - S_N) \cdot 1_{T_N=k}) + \mathbb{E}((S_k - S_N)^2 \cdot 1_{T_N=k}) \\ &\quad \text{par linéarité de l'espérance} \\ &\geqslant \mathbb{E}((S_p - S_k)^2 \cdot 1_{T_N=k}) + 0 \text{ par indépendance vue en } \mathbf{3b} \text{ et positivité de l'espérance} \\ &\geqslant \varepsilon^2\mathbb{P}([T_N = k]) \text{ d'après } \mathbf{3a} \end{aligned}$$

d. Soit $p > N$. Commençons par remarquer que $\sum_{i=N+1}^{p} 1_{T_N=k} = 1_{T_N\in[N+1,p]}$.

Ensuite, $\displaystyle\sum_{i=N+1}^{p} \mathbb{E}(Y_i^2) = \mathbb{E}\left(\left(\sum_{i=N+1}^{p} Y_i\right)^2\right)$ par indépendance mutuelle des v.a.r. (Y_i).

Donc

$$\begin{array}{rcl}\mathbb{E}((\sum_{i=N+1}^{p} Y_i)^2) & = & \mathbb{E}((S_p - S_n)^2) \\ & \geqslant & \mathbb{E}((S_p - S_N)^2 \cdot 1_{T_N \in [N+1,p]}) \\ & \geqslant & \mathbb{E}(\sum_{k=N+1}^{p} (S_p - S_N)^2 \cdot 1_{T_N = k}) \\ & \geqslant & \sum_{k=N+1}^{p} \mathbb{E}((S_p - S_N)^2 \cdot 1_{T_N = k}) \\ & \geqslant & \varepsilon^2 \sum_{k=N+1}^{p} \mathbb{P}([T_N = k])\end{array} .$$

4. Soit N un entier fixé. En passant à la limite dans l'inégalité,

$$0 \leqslant \varepsilon^2 \sum_{k=N+1}^{+\infty} \mathbb{P}([T_N = k]) \leqslant \sum_{i=N+1}^{+\infty} \mathbb{E}(Y_i^2) < +\infty.$$

$\bigcup_{p>N} [|S_p - S_N| > \varepsilon]$ est l'événement "il existe un entier $p > N$ tel que $|S_p - S_n| > \varepsilon$. Dans ce cas, il existe un entier $k > N$ minimal tel que $|S_k - S_N| > \varepsilon$. Donc l'événement $[T_N = k]$ est réalisé.

Réciproquement, si $[T_N = k]$ est réalisé, alors en particulier, $|S_k - S_N| > \varepsilon$ est réalisé, donc $\bigcup_{p>N} [|S_p - S_N| > \varepsilon]$ également.

Donc, $\bigcup_{p>N} [|S_p - S_N| > \varepsilon] = \bigcup_{k>N} [T_N = k]$.

Alors

$$\begin{array}{rcl}\mathbb{P}\left(\bigcup_{p>N} [|S_p - S_N| > \varepsilon]\right) & = & \mathbb{P}((\bigcup_{k>N} [T_N = k]) \\ & \leqslant & \sum_{k=N+1}^{+\infty} \mathbb{P}([T_N = k]) \text{ d'après le cours} \\ & \leqslant & \dfrac{1}{\varepsilon^2} \sum_{i=N+1}^{+\infty} \mathbb{E}(Y_i^2) \text{ en passant à la limite dans l'inégalité vue en } \mathbf{3d}.\end{array}$$

5. Soit $Y_n = \dfrac{X_n}{n}$. La famille (Y_n) est une famille de v.a.r. mutuellement indépendantes. De plus, $\mathbb{E}(Y_n^2) = \dfrac{1}{n^2}\mathbb{E}(X_n^2) = \dfrac{1}{n^2}$.

On constate que la série $\sum \mathbb{E}(Y_n^2)$ est convergente comme série de Riemann.

Le résultat de la partie B s'applique donc et $\mathbb{P}(\bigcup_{p>N} [|S_p - S_N| > \varepsilon]) \leqslant \dfrac{1}{\varepsilon^2} \sum_{i=N+1}^{+\infty} \dfrac{1}{i^2}$.

Donc $\mathbb{P}(\bigcup_{n,p\geqslant N} [|S_p - S_n| > \varepsilon]) \leqslant \dfrac{1}{\varepsilon^2} \sum_{i=N+1}^{+\infty} \dfrac{1}{i^2}$.

La partie de droite est le reste d'une série convergente. Lorsque N tend vers $+\infty$, ce reste tend vers 0. Donc par croissance de la fonction probabilité,

$$\lim_{N\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{n,p\geqslant N} [|S_p - S_n| < \varepsilon]\right) = 0.$$

D'après la question **2c** de la partie A, on en déduit que $\mathbb{P}(\mathcal{C}) = 1$, c'est à dire que presque sûrement, la série $\sum \dfrac{X_n}{n}$ converge.