DS 10 (3h) 14h-17h

20 Mars 2020 (objectif 20/20...)
L'usage des calculatrices n'est pas autorisé

Consignes pour rendre la copie :

— *scanner ou photographier chaque page,*

— *assembler les images dans un même pdf,*

— *REDUIRE la taille du pdf à moins de 10Mo, (combien font $30Mo \times 27$ étudiants ?)*
Il me semble par exemple que le site SCEI vous expliquait comment procéder lorsque vous avez envoyé vos documents d'inscription.

— *Nommer le pdf : NOM-Prénom.pdf*

— *l'objet du mail doit être ; DS10-Nom-Prénom*

Peu m'importe si la copie arrive à 17h ou 20h, mais pour me faciliter la vie, **prenez le temps** *de respecter ces étapes scrupuleusement !*
Merci d'avance et bon courage !

Problème

L'objet de ce problème est l'étude dans différents contextes de la convergence et parfois de la valeur de la somme d'une série de terme général $\frac{\varepsilon_n}{n}$ où, pour tout entier naturel n non nul, ε_n vaut 1 ou -1.

Partie 1 : quelques cas déterministes .

1. Justifier que la série $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ est convergente.

2. On suppose dans cette question que pour tout entier naturel n,

$$\varepsilon_{3n+1} = \varepsilon_{3n+2} = 1 \text{ et } \varepsilon_{3n+3} = (-1).$$

Quelle est la nature de la série $\sum \frac{\varepsilon_n}{n}$?

3. On suppose dans cette question que pour tout entier naturel n,

$$\varepsilon_{4n+1} = \varepsilon_{4n+2} = 1 \text{ et } \varepsilon_{4n+3} = \varepsilon_{4n+4} = (-1).$$

a. Prouver pour tout entier naturel N, l'égalité :

$$\sum_{n=0}^{N} \left(\frac{1}{4n+1} - \frac{1}{4n+3} \right) = \int_0^1 \frac{1 - x^{4N+4}}{1+x^2} \mathrm{d}x.$$

b. En déduire l'égalité $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{4n+1} - \frac{1}{4n+3} \right) = \frac{\pi}{4}$.

c. Calculer de même la somme $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{4n+2} - \frac{1}{4n+4} \right)$ et en déduire que la série $\sum \frac{\varepsilon_n}{n}$ est convergente avec $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\varepsilon_n}{n} = \frac{\pi}{4} + \frac{\ln 2}{2}$.

Partie 2 : le cas général périodique.

On admet et on pourra utiliser le théorème de Abel-Littlewood :

Théorème :

Soit f une fonction développable en série entière sur l'intervalle $]-1,1[$.
On écrit alors pour $x \in]-1,1[, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.
Si $a_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$, alors la fonction f admet une limite finie lorsque x tend vers 1 par valeurs inférieures si et seulement si la série $\sum a_n$ converge.

Soit alors p entier naturel non nul, on considère une suite $(\varepsilon_n)_{n \geqslant 1}$ périodique de période p formée d'éléments de l'ensemble $\{-1,1\}$.

4. Déterminer les rayons de convergence des séries entières $\sum_{n=1}^{+\infty} \varepsilon_n x^{n-1}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\varepsilon_n}{n} x^n$.

On pose pour $x \in]-1,1[$: $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\varepsilon_n}{n} x^n$ et $g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \varepsilon_n x^{n-1}$.

5. Établir que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\varepsilon_n}{n}$ converge si et seulement si la fonction $h : x \mapsto \int_0^x g(t)\mathrm{d}t$ admet une limite finie lorsque x tend vers 1 par valeurs inférieures.

6. Montrer que g est une fraction rationnelle à déterminer.

7. Retrouver, uniquement par les deux questions précédentes, que la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ diverge et que la série alternée $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ converge en précisant sa somme.

8. Déterminer une condition nécessaire et suffisante portant sur la somme $\sum_{i=1}^{p} \varepsilon_i$ pour que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\varepsilon_n}{n}$ converge.

9. Que peut-on en conclure dans les cas où la période p est un entier impair ?

Partie 3 : un cas aléatoire.

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. On rappelle que Ω est l'univers des possibles ω, que $\mathcal{A}$ est la tribu des événements et que $\mathbb{P}$ est une probabilité définie sur $\mathcal{A}$.
On considère une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires réelles discrètes, toutes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, **mutuellement indépendantes** et toutes de **même loi** que X_1. On suppose que la loi de la variable X_1 est donnée par :

$$\mathbb{P}([X_1 = (-1)]) = \mathbb{P}([X_1 = 1]) = \frac{1}{2}.$$

On pose pour tout entier naturel n non nul, $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{X_k}{k}$.
On note alors $\mathcal{C}$ l'ensemble des $\omega \in \Omega$ tels que la suite $(S_n(\omega))_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge.

A : la convergence presque sûre.

On **admet** qu'une suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge si et seulement si elle vérifie la propriété suivante :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^*, \forall (n,p) \in \mathbb{N}^2, (n \geqslant N \text{ et } p \geqslant N \Rightarrow |u_p - u_n| \leqslant \varepsilon).$$

10. On pose pour tout $\varepsilon > 0$, $B(\varepsilon) = \bigcup_{N=1}^{+\infty} \left(\bigcap_{n \geqslant N, p \geqslant N} [|S_p - S_n| \leqslant \varepsilon] \right)$.

a. i. Justifier que, pour tout $\varepsilon > 0$, $B(\varepsilon)$ est un événement, c'est à dire que $B(\varepsilon) \in \mathcal{A}$.

ii. Établir l'égalité $\mathcal{C} = \bigcap_{\varepsilon > 0} B(\varepsilon)$.

iii. Comparer les ensembles $B(\varepsilon)$ et $B(\varepsilon')$ quand $0 < \varepsilon < \varepsilon'$.

iv. Établir l'égalité : $\mathcal{C} = \bigcap_{k=1}^{+\infty} B(1/k)$ et en déduire que $\mathcal{C}$ est un événement, c'est à dire que $\mathcal{C} \in \mathcal{A}$.

11. **a.** Montrer que $\mathbb{P}(\mathcal{C}) = 1$ si et seulement si pour tout entier naturel k non nul,

$$\mathbb{P}\left(B(1/k)\right) = 1.$$

b. En déduire que $\mathbb{P}(\mathcal{C}) = 1$ si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{N=1}^{+\infty} \bigcup_{n,p \geqslant N} [|S_p - S_n| > \varepsilon]\right) = 0.$$

c. Montrer que $\mathbb{P}(\mathcal{C}) = 1$ si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{N \to +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{n,p \geqslant N} [|S_p - S_n| > \varepsilon]\right) = 0.$$

12. **a.** Prouver, pour tout entier naturel N non nul, l'inclusion :

$$\bigcup_{n,p \geqslant N} [|S_p - S_n| > \varepsilon] \subset \bigcup_{p > N} \left[|S_p - S_N| > \frac{\varepsilon}{2}\right].$$

b. En déduire que si pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{N \to +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{p > N} [|S_p - S_N| > \varepsilon]\right) = 0,$$

alors $\mathbb{P}(\mathcal{C}) = 1$.

B : une inégalité et le résultat.

Quand une variable aléatoire U définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ admet une espérance, on note $\mathbb{E}(U)$ sa valeur.
On rappelle que si $U_1, U_2, \ldots, U_n$ sont des variables aléatoires **mutuellement indépendantes** et **d'espérances nulles** et admettant un moment d'ordre deux, alors :

$$\forall (i,j) \in \{1, \ldots n\}^2, i \neq j \Rightarrow \mathbb{E}(U_i U_j) = \mathbb{E}(U_i)\mathbb{E}(U_j) = 0 \text{ et par conséquent : } \mathbb{E}\left(\left(\sum_{i=1}^{n} U_i\right)^2\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(U_i^2).$$

Soit $\varepsilon > 0$ et N un entier naturel non nul. On note T_N l'application qui à chaque $\omega \in \Omega$ associe l'élément de $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ défini par :

$$T_N(\omega) = \inf\left\{p \in \mathbb{N}^* : p > N \text{ et } |S_p(\omega) - S_N(\omega)| > \varepsilon\right\}.$$

(avec la convention $\inf \emptyset = +\infty$).
On rappelle que si $A \subset \Omega$ est un événement, on note $\mathbf{1}_A$ définie sur Ω la variable aléatoire telle que $\mathbf{1}_A(\omega) = 1$ si $\omega \in A$ et $\mathbf{1}_A(\omega) = 0$ sinon.

13. Soit A un événement. Établir l'égalité $\mathbb{E}(\mathbf{1}_A) = \mathbb{P}(A)$.

14. Exprimer pour tout entier $k > N$, l'ensemble $[T_N = k]$ à l'aide d'événements liés à différentes variables aléatoires S_i et en déduire que l'application T_N est une variable aléatoire.

15. **a.** Prouver, pour tout entier $k > N$, l'inégalité : $\mathbb{E}\left((S_k - S_N)^2 \mathbf{1}_{[T_N=k]}\right) \geqslant \varepsilon^2 \mathbb{P}([T_N = k])$.

b. Soit $p > N$. Justifier, pour tout $k \in [N+1, p]$, l'indépendance des variables $S_p - S_k$ et $(S_k - S_N)\mathbf{1}_{[T_N=k]}$.

c. En déduire pour tout $(p, k) \in \mathbb{N}^2$, vérifiant $N < k \leqslant p$ l'inégalité :

$$\mathbb{E}\left((S_p - S_N)^2 \mathbf{1}_{[T_N=k]}\right) \geqslant \varepsilon^2 \sum_{k=N+1}^{p} \mathbb{P}([T_N = k]).$$

16. Établir l'inégalité :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{p>N} [|S_p - S_N| > \varepsilon]\right) \leqslant \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{i=N+1}^{+\infty} \mathbb{E}\left(\left(\frac{X_i}{i}\right)^2\right).$$

17. Montrer que, presque sûrement, la série $\sum \dfrac{X_n}{n}$ converge, c'est à dire que l'ensemble des $\omega \in \Omega$ pour lesquels la série $\sum \dfrac{X_n(\omega)}{n}$ converge est de probabilité 1.