Problème 1

Dans ce problème, toutes les fonctions sont définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles.

Partie I : Partie préliminaire

Dans cette partie, les questions sont indépendantes les unes des autres et leurs résultats peuvent être admis dans la suite du problème.

1. Justifier, pour tout réel $x \in]-1, 1[$, l'existence de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1}$ et donner sa valeur.

2. On rappelle que la fonction Γ est définie pour tout réel $x \in]0, +\infty[$ par : $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$. Démontrer que pour tout réel $x \in]0, +\infty[, \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ et en déduire, pour tout entier naturel n non nul la valeur de $\Gamma(n)$.

3. Démontrer la formule de Taylor avec reste intégral : si I est un intervalle contenant le réel a, si f est une fonction de I dans $\mathbb{R}$ de classe C^∞ sur I, alors pour tout réel $x \in I$ et tout entier naturel n, on a :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt.$$

Partie II : théorème d'unicité du développement en série entière

On rappelle le théorème suivant : Si une fonction f admet un développement en série entière sur $]-a, a[$, alors :
- la fonction f est de classe C^∞ sur $]-a, a[$,
- son développement en série entière est unique et est donné par la série de Taylor de la fonction f à l'origine : $\forall x \in]-a, a[, f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$.

4. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(0) = 1$ et pour tout réel $x \neq 0, f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$. Démontrer que la fonction f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

5. Expliciter une fonction f de classe C^∞ sur un voisinage de 0 et vérifiant pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ l'égalité $f^{(n)}(0) = n \cdot n!$.

6. Un théorème des moments

Soit f une fonction développable en série entière sur $]-R, R[$ avec $R > 1$:

$\forall x \in]-R, R[, f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$.

On suppose que pour tout entier naturel n, $\displaystyle\int_0^1 x^n f(x)dx = 0$.

L'objectif de cette question est de montrer que f est identiquement nulle sur $]-R, R[$.

a. Démontrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} f(x)\frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ converge normalement sur l'intervalle $[0, 1]$.

b. À l'aide du calcul de $\displaystyle\int_0^1 (f(x))^2 dx$, démontrer que la fonction f est nulle sur l'intervalle $[0, 1]$.

c. Démontrer que f est la fonction nulle sur l'intervalle $]-R, R[$.

Contre-exemples

7. Donner un exemple de fonction f à la fois de classe C^∞ sur un intervalle I et développable en série entière au voisinage de l'origine, mais qui ne coïncide pas avec sa série de Taylor en 0 sur I tout entier.

8. Un exemple de fonction ne coïncidant avec sa série de Taylor en 0 sur aucun voisinage de 0.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

pour tout réel $x \neq 0, f(x) = \exp\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)$ et $f(0) = 0$.

a. Rappeler l'allure de la courbe de la fonction f au voisinage de 0.

b. Par des théorèmes généraux, la fonction f est de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$. Démontrer que pour tout entier naturel n, il existe un polynôme P_n tel que :

pour tout $x \in]0, +\infty[, f^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(x)}{x^{3n}} \exp\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)$.

c. Démontrer que la fonction f est de classe C^∞ sur $[0, +\infty[$ avec pour tout entier naturel n, $f^{(n)}(0) = 0$. Par parité, la fonction f ainsi définie est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

d. La fonction f est elle développable en série entière sur un intervalle $]-r, r[$ pour un $r > 0$?

9. Un exemple où la série de Taylor de la fonction f en 0 a un rayon nul.

Pour tout x réel, on pose $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1 + tx^2}$.

a. Justifier que pour tout réel x la fonction $t \mapsto \dfrac{e^{-t}}{1 + tx^2}$ est bien intégrable sur $[0, +\infty[$, puis démontrer que la fonction est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

On admettra que la fonction f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et que l'on obtient les dérivées successives en dérivant sous le signe intégrale.

b. Pour $t \in]0, +\infty[$, calculer au moyen de la série entière de $x \mapsto \dfrac{1}{1 + tx^2}$, dont on précisera le rayon de convergence, les dérivées successives en 0 de la fonction $x \mapsto \dfrac{e^{-t}}{1 + tx^2}$ pour en déduire l'expression de $f^{(n)}(0)$ pour tout entier naturel n.

c. Quel est le rayon de la série entière $\displaystyle\sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$?

Condition suffisante

On se propose dans cette partie d'étudier une condition suffisante pour qu'une fonction de classe C^∞ sur un intervalle centré en 0 soit développable en série entière au voisinage de 0.

10. Soient a un réel strictement positif et f une fonction de classe C^∞ sur l'intervalle $]-a, a[$. On suppose qu'il existe un réel $M > 0$ tel que pour tout réel $x \in]-a, a[$ et pour tout entier naturel n, $|f^{(n)}(x)| \leq M$.

a. Démontrer que la fonction f est développable en série entière au voisinage de l'origine.

b. Donner un exemple simple de fonction non polynomiale pour laquelle ce résultat s'applique.

Problème 2

n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2
$S_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices symétriques réelles, carrées de taille n.
$S_n^+(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices de $S_n(\mathbb{R})$ dont toute valeur propre est positive ou nulle.
$S_n^{++}(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices de $S_n(\mathbb{R})$ dont toute valeur propre est strictement positive.
Pour toute matrice M, on note $m_{i,j}$ le coefficient de M situé dans la i-ème ligne et la j-ème colonne de M.

Partie I

Soit S une matrice de $S_n^+(\mathbb{R})$. Le but de cette partie est d'établir l'inégalité (1) :

$$det(S) \leq \prod_{i=1}^{n} s_{i,i}.$$

1. Soit X_i la matrice de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ composée de 0 sauf en i-ème ligne où le coefficient est égal à 1. Que vaut ${}^tX_iSX_j$?

2. Rappeler le résultat matriciel du théorème spectral.
On note $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ les valeurs propres de S.

3. En déduire :

- **a.** qu'il existe M élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $S = {}^t MM$;
- **b.** que pour tout X élément de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$: ${}^tXSX \geq 0$;
- **c.** que pour tout $i \in [1, n]$, $s_{i,i} \geq 0$.

4. On suppose dans cette question que S est une matrice de $S_n^{++}(\mathbb{R})$. Démontrer

- **a.** qu'il existe M élément de $GL_n(\mathbb{R})$ tel que $S = {}^t MM$;
- **b.** que pour tout X élément non nul de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$: ${}^tXSX > 0$;
- **c.** que pour tout $i \in [1, n]$, $s_{i,i} > 0$.

5. On suppose dans cette question que S est une matrice de $S_n^+(\mathbb{R})$ mais pas de $S_n^{++}(\mathbb{R})$.
Établir l'inégalité (1) pour S.

6. On suppose dans cette question que S est une matrice de $S_n^{++}(\mathbb{R})$ et que
pour tout $i \in [1, n]$, $s_{i,i} = 1$.

- **a.** Montrer que la fonction exponentielle est convexe sur $\mathbb{R}$.
- **b.** En déduire que $\sqrt[n]{\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdots \lambda_n} \leq \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i$.
- **c.** Démonter que l'inégalité (1) est vérifiée par S.

7. On suppose dans cette question que S est une matrice de $S_n^{++}(\mathbb{R})$. Soit T la matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que pour tout i dans $[1, n]$, $t_{i,i} = \dfrac{1}{\sqrt{s_{i,i}}}$ et B la matrice définie par $B = TST$.

- **a.** Montrer que pour tout X élément non nul de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$: ${}^tXBX > 0$.
- **b.** En déduire que $B \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.
- **c.** Démontrer que l'inégalité (1) est vérifiée par S.

Partie II

Dans cette partie, on utilise l'inégalité (1) de la partie I pour établir l'inégalité de Hadamard.
Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

8. Vérifier que l'on peut appliquer l'inégalité (1) à ${}^tAA$.

9. En déduire l'inégalité de Hadamard :

$$|det(A)| \leq \prod_{i=1}^{n} \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (a_{k,i})^2}.$$

Partie III

Dans cette partie, on utilise l'inégalité de Hadamard pour établir que l'inverse d'une fonction développable en série entière au voisinage de 0 non nulle à l'origine est encore développable en série entière au voisinage de 0.

Soit (a_n) une suite réelle telle que $a_0 \neq 0$.

10. Justifier l'existence d'une unique suite réelle (b_n) telle que $a_0 b_0 = 1$ et $\forall n \geq 1, \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = 0$.

11. Pour $n \geq 1$, on considère la matrice A de $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ suivante :

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ a_1 & a_0 & \ddots & & 0 & \\ a_2 & \ddots & \ddots & & \vdots & \\ \vdots & \ddots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & a_0 & 0 \\ a_n & \cdots & & a_2 & a_1 & a_0 \end{pmatrix}.$$

a. Calculer le produit matriciel $A \times \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$.

b. Justifier que $A \in GL_{n+1}(\mathbb{R})$.

c. Appliquer les formules de Cramer pour en déduire que $b_n = \dfrac{det(A')}{det(A)}$ où A' est une matrice de $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ à préciser.

12. On suppose qu'il existe un réel r strictement positif tel que la série de terme général $|a_n| r^n$ converge. On pose $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| r^n = C$. Montrer que la série de terme général $(a_n)^2 r^{2n}$ converge et que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n)^2 r^{2n} \leq C^2$.

13. Utiliser alors l'expression de b_n et l'inégalité de Hadamard pour montrer que

$$\forall n \geq 1, |b_n| \leq \frac{1}{|a_0| \alpha^n}$$

où α est un réel positif indépendant de n à préciser (on pourra considérer la matrice A'' de $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ obtenue à partir de A' en multipliant la i-ème ligne de A' par r^{i-1}, pour tout $i \in [1, n+1]$.

14. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, développable en série entière sur $]-r, r[$ avec $r > 0$ telle que $f(0) = 0$. Montrer qu'il existe $r' > 0$ tel que $1/f$ soit encore développable en série entière sur $]-r', r'[$.