DEVOIR MAISON n° 6

- Dans le problème, λ désigne *toujours* une application continue de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$, croissante et non majorée.
- Dans le problème, f désigne *toujours* une application continue de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$.
- On note E l'ensemble des réels x pour lesquels l'application $t \mapsto f(t)e^{-\lambda(t)x}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.
- On note E' l'ensemble des réels x pour lesquels l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)e^{-\lambda(t)x}\,dt$ converge.

On se propose ci-après d'étudier la transformation $f \mapsto Lf$ définien en I.A, d'en établir quelques propriétés, d'examiner certains exemples et d'utiliser la transformation L pour l'étude d'un opérateur.

Préliminaires, définition de la transformation L.

I.A. Quelle inclusion exsiste-t-il entre les ensembles E et E' ?

Désormais, pour $x \in E'$, on notera

$$Lf(x) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-\lambda(t)x}\,dt$$

I.B. Montrer que si E n'est pas vide, alors E est un intervalle non majoré de $\mathbb{R}$.

I.C. Montrer que si E n'est pas vide, alors Lf est continue sur E.

Exemples dans le cas de f positive.

II.A. Comparer E et E' dans le cas où f est positive.

II.B. Dans les trois cas suivants, déterminer E.

II.B.1) $f(t) = \lambda'(t)$ avec λ supposée de classe C^1.

II.B.2) $f(t) = e^{t\lambda(t)}$.

II.B.3) $f(t) = \frac{e^{-t\lambda(t)}}{1+t^2}$.

II.C. Dans cette question, on étudie le cas $\lambda(t) = t^2$ et $f(t) = \frac{1}{1+t^2}$ pour tout $t \in \mathbb{R}^+$.

II.C.1) Déterminer E. Que vaut $Lf(0)$?

II.C.2) Prouver que Lf est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$.

II.C.3) Montrer l'existence d'une constante $A > 0$ telle que pour tout $x > 0$, on ait

$$Lf(x) - (Lf)'(x) = \frac{A}{\sqrt{x}}$$

II.C.4) On note $g(x) = e^{-x}Lf(x)$ pour $x \geq 0$. Montrer que

$$\forall x \geq 0,\ g(x) = \frac{\pi}{2} - A\int_0^x \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\,dt$$

II.C.5) En déduire la valeur de l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$.

Etude d'un premier exemple.

Dans cette partie, $\lambda(t) = t$ pour tout $t \in \mathbb{R}^+$ et $f(t) = \frac{t}{e^t-1} - 1 + \frac{t}{2}$ pour tout $t \in \mathbb{R}^{+*}$.

III.A. Montrer que f se prolonge par continuité en 0. On note encore f le prolongement obtenu.

III.B. Déterminer E.

III.C. A l'aide d'un développement en série, montrer que pour tout $x > 0$, on a

$$Lf(x) = \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2}$$

III.D. Est-ce que $Lf(x) - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{x}$ admet une limite finie en 0^+ ?

Généralités dans le cas typique.

Dans cette partie, $\lambda(t) = t$ pour $t \in \mathbb{R}^+$.

IV.A. Montrer que si E n'est pas vide et si α est sa borne inférieure (on convient que $\alpha = -\infty$ si $E = \mathbb{R}$) alors Lf est de classe C^∞ sur $]\alpha, +\infty[$ et exprimer ses dérivées successives à l'aide d'une intégrale.

IV.B. Dans le cas particulier où $f(t) = e^{-at}t^n$ pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, avec $n \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{R}$, expliciter E, E' et calculer $Lf(x)$ pour $x \in E'$.

IV.C. Comportement en l'infini.

On suppose ici que E n'est pas vide et que f admet au voisinage de 0 le développement limité d'ordre $n \in \mathbb{N}$ suivant :

$$f(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k!} t^k + O(t^{n+1})$$

IV.C.1) Montrer que pour tout $\beta > 0$, on a, lorsque x tend vers $+\infty$, le développement asymptotique suivant :

$$\int_0^\beta \left(f(t) - \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k!} t^k \right) e^{-tx}\, dt = O(x^{-n-2})$$

IV.C.2) En déduire que lorsque x tend vers $+\infty$, on a le développement asymptotique :

$$Lf(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{x^{k+1}} + O(x^{-n-2})$$

IV.D. Comportement en 0.

On suppose ici que f admet une limite finie ℓ en $+\infty$.

IV.D.1) Montrer que E contient $\mathbb{R}^{+*}$.

IV.D.2) Montrer que $xLf(x)$ tend vers ℓ en 0^+.

Etude d'un deuxième exemple.

Dans cette partie, $\lambda(t) = t$ pour tout $t \in \mathbb{R}^+$ et $f(t) = \frac{\sin(t)}{t}$ pour tout $t > 0$, f étant prolongée par continuité en 0.

V.A. Montrer que E ne contient pas 0.

V.B. Montrer que $E =]0, +\infty[$.

V.C. Montrer que E' contient 0.

V.D. Calculer $(Lf)'(x)$ pour $x \in E$.

V.E. En déduire $(Lf)(x)$ pour $x \in E$.

V.F. On note pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \geq 0$, $f_n(x) = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin(t)}{t} e^{-tx}\, dt$. Montrer que $\sum (f_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément sur $[0, +\infty[$.

V.G. Que vaut $Lf(0)$?

Injectivité dans le cas typique.

Dans cette partie, $\lambda(t) = t$ pour tout $t \in \mathbb{R}^+$.

VI.A. Soit g une application continue de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\int_0^1 t^n g(t)\, dt = 0$$

VI.A.1) Que dire de $\int_0^1 P(t)g(t)\, dt$ pour $P \in \mathbb{R}[X]$?

VI.A.2) En déduire que g est l'application nulle.

VI.B. Soient f fixée telle que E soit non vide, $x \in E$ et $a > 0$. On pose $h(t) = \int_0^t e^{-xu} f(u)\, du$ pour tout $t \geq 0$.

VI.B.1) Montrer que $Lf(x + a) = a \int_0^{+\infty} e^{-at} h(t)\, dt$.

VI.B.2) On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $Lf(x + na) = 0$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\int_0^1 u^n h\left(-\frac{\ln(u)}{a}\right) du$ converge et qu'elle est nulle.

VI.B.3) Qu'en déduit-on pour la fonction h ?

VI.C. Montrer que l'application qui à f associe Lf est injective.

Etude en la borne inférieure de E.

VII.A. Cas positif.

On suppose que f est positive et que E n'est ni vide ni égal à $\mathbb{R}$. On note α sa borne inférieure.

VII.A.1) Montrer que si Lf est bornée sur E, alors $\alpha \in E$.

VII.A.2) Si $\alpha \notin E$, que dire de $Lf(x)$ quand x tend vers α^+ ?

VII.B. Dans cette question, $f(t) = \cos(t)$ et $\lambda(t) = \ln(1+t)$.

VII.B.1) Déterminer E.

VII.B.2) Déterminer E'.

VII.B.3) Montrer que Lf admet une limite en α, borne inférieure de E, et la déterminer.