

## PROBLEME : Une introduction aux fonctions tests

Dans tout le problème,  $\mathbb{R}$  est muni de sa norme naturelle : la valeur absolue. Toutes les fonctions considérées seront à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .

Si  $h$  est une fonction de classe  $C^k$ ,  $h^{(k)}$  désigne la dérivée  $k$ -ième de  $h$ .

Si  $h$  est une fonction bornée sur  $\mathbb{R}$ , on note  $\|h\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}} |h(x)|$ .

Une fonction définie sur  $\mathbb{R}$  est dite **nulle à l'infini** si ses limites en  $+\infty$  et en  $-\infty$  sont nulles.

Objectifs :

Le **support** d'une fonction  $f$  définie sur un intervalle  $I$ , noté  $\text{Supp } f$ , est l'adhérence de l'ensemble des points où elle ne s'annule pas :  $\text{Supp } f = \overline{\{x \in I, f(x) \neq 0\}}$ .

Une fonction est dite à **support compact** si son support est une partie compacte de  $\mathbb{R}$ .

On appellera **fonction test**, une fonction de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$  à support compact.

On note  $\mathcal{T}$  l'ensemble des fonctions tests. Il est facile de vérifier que  $\mathcal{T}$  est une  $\mathbb{R}$ -algèbre.

Le but du sujet est de découvrir des fonctions tests dans la partie **I** et d'en voir deux utilisations ; pour l'approximation uniforme de fonctions dans la partie **II**, et pour démontrer un théorème de Whitney à la partie **III**.

Les parties **II** et **III** sont **indépendantes** et utilisent des résultats de la partie **I**.

### I. Découverte des fonctions tests

1. Soit  $A$  une partie de  $\mathbb{R}$ . Montrer que  $A$  est bornée si et seulement si son adhérence  $\overline{A}$  est une partie compacte de  $\mathbb{R}$ .

Une fonction  $f$  définie sur  $I$  est donc à support compact si et seulement si  $\{x \in I, f(x) \neq 0\}$  est une partie bornée de  $\mathbb{R}$ .

#### 2. Quelques exemples

- a. On note  $u$  la fonction paire définie sur  $\mathbb{R}$  par  $u(x) = 4 - x^2$  si  $x \in [0, 2]$  et  $u(x) = 0$  si  $x > 2$ .  
Représenter la fonction  $u$  et déterminer son support. La fonction  $u$  est-elle à support compact ? La fonction  $u$  est-elle une fonction test ?
- b. La fonction sinus est-elle une fonction test ?

3. Soit  $h$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $h(x) = e^{-\frac{1}{x}}$  si  $x > 0$  et  $h(x) = 0$  si  $x \leq 0$ .

- a. La fonction  $h$  est, d'après les théorèmes généraux, de classe  $C^\infty$  sur  $]0, +\infty[$ . Montrer que pour tout entier naturel  $k$ , il existe un polynôme  $P_k$  dont on précisera le degré tel que pour tout réel  $x$  strictement positif,  $h^{(k)}(x) = P_k\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x}}$ . En déduire que  $h$  est de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ .
- b. La fonction  $h$  est-elle une fonction test ?  $h$  est-elle développable en série entière au voisinage de 0 ?

4. On définit sur  $\mathbb{R}$  la fonction  $\varphi$  par  $\varphi(x) = h(-(x+1)(x-1))$ .
- Déterminer le support de  $\varphi$  puis justifier que c'est une fonction test. Déterminer les variations de  $\varphi$  puis tracer l'allure de sa courbe.
  - Déterminer une fonction test dont le support est  $[3, 8]$  puis une fonction test dont le support est  $[1, 2] \cup [5, 6]$ .
5. Déterminer les limites en  $+\infty$  et  $-\infty$  d'une fonction définie sur  $\mathbb{R}$  à support compact.
6. *Construction d'une suite régularisante*
- Justifier que la fonction  $\varphi$  de la question 4. est intégrable sur  $\mathbb{R}$  et que  $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) dt > 0$ . En déduire l'expression d'une fonction test  $\rho$  positive, de support  $[-1, 1]$ , intégrable sur  $\mathbb{R}$  et telle que  $\int_{-\infty}^{+\infty} \rho(t) dt = 1$ .

Pour tout entier naturel non nul  $n$ , on définit sur  $\mathbb{R}$  la fonction  $\rho_n$  par  $\rho_n(x) = n\rho(nx)$ . La suite de fonctions  $(\rho_n)_n$  est appelée *suite régularisante*.

- Pour tout entier naturel non nul  $n$ , déterminer le support de  $\rho_n$  et calculer  $\int_{-\infty}^{+\infty} \rho_n(t) dt$ .

## II. Approximation uniforme sur $\mathbb{R}$ par des fonctions de classe $C^\infty$ ou par des fonctions tests

Un théorème de Weierstrass nous dit que toute fonction continue sur un **segment** peut être approchée uniformément par des fonctions polynômes.

Voyons ce qu'il en est si la fonction est continue sur  $\mathbb{R}$  tout entier (donc sur **un intervalle non borné**).

### 7. L'approximation polynomiale ne convient plus

Soit  $(P_n)_n$  une suite de fonctions polynômes qui converge uniformément sur  $\mathbb{R}$  vers une fonction  $f$ .

- Justifier qu'il existe un entier naturel  $N$  tel que pour tout entier naturel  $n$  supérieur ou égal à  $N$ , on ait pour tout réel  $x$ ,  $|P_n(x) - P_N(x)| \leq 1$ .

Que peut-on en déduire quant au degré des fonctions polynômes  $P_n - P_N$  lorsque  $n \geq N$  ?

- Conclure que  $f$  est nécessairement une fonction polynôme.

Nous allons toutefois démontrer qu'il est possible d'approcher certaines fonctions uniformément sur  $\mathbb{R}$ , non pas par des fonctions polynômes, mais par des fonctions de classe  $C^\infty$ , ou par des fonctions tests.

Plus précisément, nous allons démontrer les deux résultats d'approximation suivants :

(A<sub>1</sub>) : toute fonction continue sur  $\mathbb{R}$ , nulle à l'infini est limite uniforme sur  $\mathbb{R}$  d'une suite de fonctions continues sur  $\mathbb{R}$  à support compact.

(A<sub>2</sub>) : toute fonction continue sur  $\mathbb{R}$  à support compact, est limite uniforme sur  $\mathbb{R}$  d'une suite de fonctions tests.

L'approximation (A<sub>1</sub>) est un résultat préliminaire, qui est démontré à la question 8.

**8. Approximation d'une fonction continue nulle à l'infini par une suite de fonctions continues à support compact**

Pour tout entier naturel  $n$ , on définit sur  $\mathbb{R}$ , la fonction paire  $z_n$  par  $z_n(x) = 1$  si  $x \in [0, n[$ ,  $z_n(x) = -x + n + 1$  si  $x \in [n, n + 1[$  et  $z_n(x) = 0$  si  $x \in [n + 1, +\infty[$ .

- Représenter graphiquement la fonction  $z_n$ . Déterminer la limite simple de la suite de fonctions  $(z_n)$ . La convergence est-elle uniforme sur  $\mathbb{R}$  ?
- Soit  $g$  une fonction continue sur  $\mathbb{R}$ , nulle à l'infini. Démontrer que la fonction  $g$  est bornée sur  $\mathbb{R}$ . On peut donc poser pour tout entier naturel  $n$ ,  $\alpha_n = \sup_{|x| \geq n} |g(x)|$ .
- Etudier la monotonie de la suite  $(\alpha_n)$  puis déterminer sa limite lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .
- Pour tout entier naturel  $n$ , on définit la fonction  $g_n$  en posant  $g_n = g z_n$ . Déterminer un réel  $k$  tel que pour tout entier naturel  $n$ ,  $\|g_n - g\|_\infty \leq k \alpha_n$ .
- En déduire le résultat d'approximation  $(A_1)$  : toute fonction continue sur  $\mathbb{R}$ , nulle à l'infini peut être approchée uniformément sur  $\mathbb{R}$  par une suite de fonctions continues sur  $\mathbb{R}$  à support compact.

Dans les questions **9.**, **10.**, et **11.**,  $f$  désigne une fonction continue sur  $\mathbb{R}$  et  $g$  désigne une fonction continue à **support compact**. Il existe donc un réel  $R > 0$  tel que  $\text{Supp } g \subset [-R, R]$ .

**9. Convolution**

- Justifier que, pour tout réel  $x$ , l'application  $t \mapsto g(t) f(x-t)$  est intégrable sur  $\mathbb{R}$ . On définit alors sur  $\mathbb{R}$  la fonction  $g * f$  par  $(g * f)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) f(x-t) dt$ . On dit que  $g * f$  est le *produit de convolution* de  $g$  par  $f$ .
- Soit  $x$  un réel, montrer que l'application  $t \mapsto f(t) g(x-t)$  est intégrable sur  $\mathbb{R}$ .  
On définit donc sur  $\mathbb{R}$  la fonction  $f * g$  par  $(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) g(x-t) dt$ .  
Comparer les fonctions  $f * g$  et  $g * f$ .

**10. Support d'une convolution**

- Dans cette question, on suppose de plus que  $f$  est à support compact, il existe donc un réel  $S > 0$  tel que  $\text{Supp } f \subset [-S, S]$ . Si  $x > R + S$ , que vaut  $(f * g)(x)$  ?  
En déduire que  $f * g$  est aussi à support compact.
- Montrer que si la fonction  $f$  n'est pas à support compact,  $f * g$  n'est pas nécessairement à support compact.

**11. Dérivation d'une convolution**

- Soit  $a$  un réel strictement positif. Justifier que pour tout  $x \in [-a, a]$ ,  
$$(f * g)(x) = \int_{-a-R}^{a+R} f(t) g(x-t) dt.$$
- Montrer que si  $g$  est de plus supposée de classe  $C^1$ , alors  $f * g$  est de classe  $C^1$ . Écrire alors  $(f * g)'$  à l'aide d'un produit de convolution.

Si on suppose de plus, que  $g$  est de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ , on démontre de la même manière et on l'admettra que  $f * g$  est également de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ .

### 12. Application à l'approximation

a. Soit  $n$  un entier naturel non nul,  $\rho_n$  désigne la fonction test introduite dans la question 6.,

montrer que pour tout réel  $x$ ,  $|f * \rho_n(x) - f(x)| \leq \int_{-1/n}^{1/n} |f(x-t) - f(x)| \rho_n(t) dt$ .

b. On suppose de plus que  $f$  est uniformément continue sur  $\mathbb{R}$ .

Montrer avec soin que la suite de fonctions  $(f * \rho_n)_{n \geq 1}$  est une suite de fonctions de classe  $C^\infty$  qui converge uniformément sur  $\mathbb{R}$  vers  $f$ .

c. En déduire le résultat d'approximation ( $A_2$ ): toute fonction continue sur  $\mathbb{R}$  à support compact, est limite uniforme sur  $\mathbb{R}$  d'une suite de fonctions tests (on pourra utiliser librement le résultat suivant: une fonction continue sur  $\mathbb{R}$ , nulle à l'infini, est uniformément continue sur  $\mathbb{R}$ ).

Remarque: L'espace des fonctions tests joue un rôle important en analyse, notamment dans la théorie des distributions pour la résolution d'équations aux dérivées partielles.

### III. Théorème de Whitney

Le but de cette partie est de démontrer le théorème suivant :

**Théorème de Whitney**: Si  $F$  est une partie fermée de  $\mathbb{R}$ , alors il existe une fonction  $f$  de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$  telle que  $F = Z(f)$  où  $Z(f) = \{x \in \mathbb{R}, f(x) = 0\}$ .

13. Justifier que la réciproque du théorème de Whitney est vraie.

14. *Une première tentative de preuve... infructueuse*

Soit  $F$  une partie fermée de  $\mathbb{R}$ .

Pour tout réel  $x$ , on note  $d(x, F) = \inf_{y \in F} |x - y|$  et  $d_F$  l'application définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$d_F(x) = d(x, F).$$

Déterminer  $Z(d_F)$ . Quelle propriété notée (P) devrait vérifier l'application  $d_F$  pour que le théorème de Whitney puisse être démontré ?

Représenter graphiquement  $d_F$  dans le cas particulier où  $F = ]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$ .

$d_F$  vérifie-t-elle cette propriété (P) ? Justifier votre réponse.

15. *Utilisation de fonctions tests*

Démontrer le théorème de Whitney dans les cas suivants :

(i)  $F$  est le complémentaire d'un intervalle ouvert  $]a, b[$ .

(ii)  $F$  est le complémentaire de la réunion de deux intervalles ouverts disjoints.

16. Démontrer le théorème de Whitney dans le cas général. On utilisera librement le résultat suivant: une partie ouverte  $\Omega$  de  $\mathbb{R}$ , peut s'écrire comme une réunion finie ou dénombrable d'intervalles ouverts disjoints, c'est-à-dire  $\Omega = \bigcup_{k \in I} ]a_k, b_k[$ , où  $I$  est une partie de  $\mathbb{N}$ .

**Fin de l'énoncé**