corrigé **DM3**

1. **Applications linéaires continues** :
Soit $f \in L(E,F)$.
   (a) Par définition de la continuité de f en 0_E on a
$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in E, N_E(x - 0_E) \leqslant \alpha \Rightarrow N_F(f(x) - f(0_E)) \leqslant \varepsilon.$$
Pour $\varepsilon = 1$ on a donc l'existence d'un réel $\alpha > 0$ tel que pour tout vecteur $x \in E$
$$N_E(x) < \alpha \Rightarrow N_F(f(x)) < 1$$
En particulier $\forall x \in E - \{0_E\}$, pour $y = \frac{\alpha}{N_E(x)}x$, on a $N_E(y) = \alpha$ donc $N_F(f(\frac{\alpha}{N_E(x)}x)) \leqslant 1$
Donc $\frac{\alpha}{N_E(x)} N_F(f(x)) \leqslant 1$, ainsi $N_F(f(x)) \leqslant k.N_E(x)$, avec $k = \frac{1}{\alpha}$. Cette inégalité reste vraie pour $x = 0_E$.
   (b) Réciproquement supposons que $\forall x \in E, N_F(f(x)) \leqslant k.N_E(x)$ alors puisque f est linéaire, pour tout $(x,y) \in E^2$,
$$N_F(f(x) - f(y)) = N_F(f(x-y)) \leqslant k.N_E(x-y)$$
Donc f est $k - lipschitzienne$ et donc continue sur E.

2. **Toutes les applications linéaires sur E de dimension finie sont continues**
   (a) L'espace E est de dimension finie donc sur E toutes les normes sont équivalentes et donc en particulier il existe un réel $\alpha > 0$ tel que pour tout vecteur x, $N_\infty(x) \leqslant \alpha N_E(x)$.
   (b)
$$\begin{aligned} N_F(f(x)) &= N_F(f(\sum_{i=1}^n x_i e_i)) \\ &= N_F(\sum_{i=1}^n x_i f(e_i)) \leqslant \sum_{i=1}^n |x_i| \, N_F(f(e_i)) \\ &\leqslant \sum_{i=1}^n N_\infty(x) N_F(f(e_i)) = k.N_\infty(x) \\ \text{avec } k &= \sum_{i=1}^n N_F(f(e_i)) > 0 \end{aligned}$$
   (c) Soit $f \in L(E,F)$ une application linéaire. Avec les notations précédentes on a pour tout vecteur x
$$N_F(f(x)) = k.N_\infty(x) \leqslant k\alpha.N_E(x)$$
D'après le 1° on en déduit que f est continue sur E.

3. **Définition de la norme subordonnée d'une application linéaire continue**
Soit $f \in L(E,F)$.On pose
$$|||f||| = \sup(\frac{N_F(f(x))}{N_E(x)}, x \in E, x \neq 0_E)$$
   (a) considérons l'ensemble des réels $X = \left\{ \frac{N_F(f(x))}{N_E(x)}, x \in E, x \neq 0_E \right\}$. f étant continue, d'après le 1° on en déduit qu'il existe une constante $k \geqslant 0$ telle que pour tout $x \neq 0_E$, $\frac{N_F(f(x))}{N_E(x)} \leqslant k$. Donc X est une partie majorée et non vide de $\mathbb{R}$ elle admet une borne supérieure : $|||f|||$. De plus par définition $|||f|||$ est le plus petit des majorants de X et donc pour tout $x \neq 0_E$ $\frac{N_F(f(x))}{N_E(x)} \leqslant |||f|||$. Donc pour tout x ,$N_F(f(x)) \leqslant |||f||| \, N_E(x)$
   (b) i) $\forall f \in L(E,F)$, $|||f||| \geqslant 0$

ii) $\forall (f,g) \in L(E,F)$ on a pour tout vecteur $x \in E$,
$$N_F((f+g)(x)) \leqslant N_F(f(x)) + N_F(g(x)) \leqslant (|||f||| + |||g|||)N_E(x)$$
donc $\frac{N_F((f+g)(x))}{N_E(x)} \leqslant |||f||| + |||g|||$. En passant à la borne supérieure pour $x \in E - \{0_E\}$,
$$|||f+g||| \leqslant |||f||| + |||g|||$$
iii) $\forall f \in E$ et $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, pour tout $x \in E$, $\frac{N_F(\alpha f(x))}{N_E(x)} = |\alpha| \frac{N_F(f(x))}{N_E(x)}$. Donc en passant à la borne supérieure sur x,
$$\begin{aligned} \sup(\frac{N_F(\alpha f(x))}{N_E(x)}, x &\in E, x \neq 0_E) = |\alpha| \sup(\frac{N_F(f(x))}{N_E(x)}, x \in E, x \neq 0_E) \\ |||\alpha f||| &= |\alpha| \, . \, |||f||| \end{aligned}$$
iv) Supposons que pour $f \in L(E,F)$ on ait $|||f||| = 0$ alors $\forall x \in E, N_F(f(x)) \leqslant 0$ donc $f(x) = 0_F$ et donc $f = 0$
On en déduit que $|||.|||$ est une norme sur $L(E,F)$
   (c) On a pour tout vecteur $x \in S$, $N_F(f(x)) = \frac{N_F(f(x))}{N_E(x)} \leqslant |||f|||$ donc $\boxed{\sup(N_F(f(x)), x \in S) \leqslant |||f|||}$
De plus pour tout $x \in E - \{0_E\}$,
$$\frac{N_F(f(x))}{N_E(x)} = N_F(f(\frac{x}{N_E(x)})) = N_F(f(y)) \text{ avec } y = \frac{x}{N_E(x)}$$
On remarque que $y \in S$ et donc $N_F(f(y)) \leqslant \sup(N_F(f(x)), x \in S)$ donc
$$\frac{N_F(f(x))}{N_E(x)} \leqslant \sup(N_F(f(x)), x \in S)$$
En passant à la borne supérieure sur $x \in E$, on a $\boxed{|||f||| \leqslant \sup(N_F(f(x)), x \in S)}$
Conclusion
$$\sup(N_F(f(x)), x \in S) = |||f|||$$

4. **La norme subordonnée est atteinte**
Soit $f \in L(E,F)$
   (a) On sait que pour tout vecteur $x \neq 0_E$, $\frac{N_F(f(x))}{N_E(x)} \leqslant k$, donc
$$|||f||| = \sup(\frac{N_F(f(x))}{N_E(x)}, x \in E, x \neq 0_E) \leqslant k$$
De plus $\sup(N_F(f(x)), x \in S) = |||f|||$ donc par définition de la borne supérieure.
$$N_F(f(x_0)) = k \leqslant |||f|||$$
Conclusion : $k = |||f|||$
   (b) (i) Une partie compacte K est une partie K de E telle que de toute suite on peut extraire une suite qui converge dans K.
S est une **partie fermée et bornée** de E qui est de dimension finie donc S est compacte.
   (ii) L'application $x \to N_F(f(x))$ est lipschitzienne sur S puisque $|N_F(f(x)) - N_F(f(y))| \leqslant |N_F(f(x-y))| \leqslant |||f||| \, .N_E(x-y)$. elle est donc continue à valeurs dans $\mathbb{R}$. Elle atteint donc sa borne supérieure sur le compact S en un vecteur $x_0 \in S$, ce qui signifie que $\sup(N_F(f(x)), x \in S) = N_F(f(x_0)) = |||f|||$.

Partie II Exemples

1. **Cas d'un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$**
$E = \mathbb{R}^2$ et $f \in L(E)$ admet pour matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ dans la base canonique .

(a) On a pour tout vecteur $x = x_1e_1 + x_2e_2$,

$$f(x) = x_1(e_1 + 3e_2) + x_2(2e_1 + 4e_2) = (x_1 + 2x_2)e_1 + (3x_1 + 4x_2)e_2$$

Donc

$$\begin{aligned} N_\infty(f(x)) &= \sup(|x_1 + 2x_2|, |3x_1 + 4x_2|) \leqslant \sup(|x_1| + 2|x_2|, 3|x_1| + 4|x_2|) \\ &\leqslant \sup(3N_\infty(x), 7N_\infty(x)) = 7N_\infty(x) \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\frac{N_\infty(f(x))}{N_\infty(x)} \leqslant 7 \text{ donc } |||f||| \leqslant 7$$

De plus si on considère le vecteur $x_0 = e_1 + e_2$ on a $f(x_0) = 3e_1 + 7e_2$ on a donc $\frac{N_\infty(f(x_0))}{N_\infty(x_0)} = \frac{7}{1} = 7$

D'après la partie I on en déduit que $|||f||| = 7$

(b)

$$\begin{aligned} N_1(f(x)) &= |x_1 + 2x_2| + |3x_1 + 4x_2|) \leqslant |x_1| + 2|x_2| + 3|x_1| + 4|x_2| \\ &= 4|x_1| + 6|x_2| \leqslant 6(|x_1| + |x_2|) = 6N_1(x) \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\frac{N_1(f(x))}{N_1(x)} \leqslant 6 \text{ donc } |||f||| \leqslant 6$$

De plus si on considère le vecteur $x_0 = e_2$ on a $f(x_0) = 2e_1 + 4e_2$ on a donc $\frac{N_1(f(x_0))}{N_1(x_0)} = \frac{6}{1} = 6$

D'après la partie I ion en déduit que $|||f||| = 6$

(c) On munit E de la norme N_2. On considère le vecteur $x = (\cos\theta, \sin\theta)$

(i) $N_2(x) = \sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = 1$

(ii)

$$N_2(f(x)) = \sqrt{(\cos\theta + 2\sin\theta)^2 + (3\cos\theta + 4\sin\theta)^2} = \sqrt{10\cos^2\theta + 20\sin^2\theta + 28\sin\theta\cos\theta}$$

or $\cos(2\theta) = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\sin^2\theta$ et $\sin(2\theta) = 2\sin\theta\cos\theta$

donc

$$N_2(f(x)) = \sqrt{5(1 + \cos(2\theta)) + 10(1 - \cos 2\theta) + 14\sin 2\theta} = \sqrt{15 - 5\cos 2\theta + 14\sin 2\theta}$$

(iii) On a $-5\cos 2\theta + 14\sin 2\theta = \sqrt{5^2 + 14^2}(\frac{-5}{\sqrt{221}}\cos 2\theta + \frac{14}{\sqrt{221}}\sin 2\theta)$

Posons $\varphi = \arcsin(\frac{-5}{\sqrt{221}})$ on a $\sin(\varphi) = \frac{-5}{\sqrt{221}}$ et $\cos(\varphi) = \sqrt{1 - \frac{25}{221}} = \frac{14}{\sqrt{221}}$

Donc $-5\cos 2\theta + 14\sin 2\theta = \sqrt{221}.\sin(2\theta + \varphi)$ et donc

$$\sqrt{15 - 5\cos 2\theta + 14\sin 2\theta} = \sqrt{15 + \sqrt{221}.\sin(2\theta + \varphi)} \leqslant \sqrt{15 + \sqrt{221}} \qquad (1)$$

On en déduit que

$$\forall x \in S, N_2(f(x)) \leqslant \sqrt{15 + \sqrt{221}} \text{ et donc } |||f||| \leqslant \sqrt{15 + \sqrt{221}}$$

l'inégalité (1) est une égalité lorsque $2\theta + \varphi = \frac{\pi}{2}$ donc $\theta = \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} = \theta_0$. En particulier pour le vecteur $x_0 = (\cos\theta_0, \sin\theta_0)$ qui appartient à S on a $N_2(f(x_0)) = \sqrt{15 + \sqrt{221}}$. On en déduit que

$$|||f||| = \sqrt{15 + \sqrt{221}}$$

2. **Cas d'une forme linéaire sur $\mathbb{R}_1[x]$ pour la norme N_2**

$E = \mathbb{R}_1[x]$ est l'espace des fonctions polynômes de degré $\leqslant 1$ sur $[0, 1]$ muni de la norme euclidienne

$$N_2(f) = \sqrt{\int_0^1 f^2(t)dt}$$

Pour $f \in E$, on pose

$$u(f) = \int_0^1 f(t).(1 - 2t).dt$$

(a) Pour toutes fonctions $f, g \in E^2$,et $\lambda \in \mathbb{R}$, $u(f + \lambda g) = \int_0^1 (f(t) + \lambda g(t)).(1 - 2t).dt = u(f) + \lambda u(g)$

donc u est linéaire

De plus pour toute fonction $f \in E$, $|u(f)| = \left|\int_0^1 f(t).(1 - 2t).dt\right| \leqslant \sqrt{\int_0^1 f^2(t)dt}\sqrt{\int_0^1 (1 - 2t)^2 dt}$

d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz

Donc

$$\begin{aligned} |u(f)| &\leqslant \sqrt{\left[-\frac{(1 - 2t)^3}{6}\right]_0^1} = N_2(f) \\ |u(f)| &\leqslant \frac{1}{\sqrt{3}}N_2(f) \end{aligned}$$

donc d'après la partie 1, u continue de E dans $\mathbb{R}$.

(b) Notons que l'inégalité de Cauchy-Schwarz est une égalité ssi les fonctions f et $1 - 2t$ sont proportionnelles

Ainsi pour $f_0(t) = 1 - 2t$, on a

$$|u(f_0)| = \int_0^1 (1 - 2t)^2 dt = \sqrt{\int_0^1 (1 - 2t)^2(t)dt}\sqrt{\int_0^1 (1 - 2t)^2 dt} = \frac{1}{\sqrt{3}}N_2(f_0)$$

donc

$$|||u||| = \sup\frac{|u(f_0)|}{N_2(f_0)} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

3. **Cas d'une forme linéaire sur $\mathbb{R}_1[x]$ pour la norme N_∞**

$E = \mathbb{R}_1[x]$ est l'espace des fonctions polynômes de degré $\leqslant 1$ sur $[0, 1]$ muni de la norme

$$N_\infty(f) = \max(|f(x)|, x \in [0, 1]).$$

Pour $f \in E$, on considère la forme linéaire

$$v(f) = \int_0^1 f(t).(t - 2t^2).dt$$

(a) $\int_0^1 \left|t - 2t^2\right| dt = \int_0^{1/2}(t - 2t^2)dt + \int_{1/2}^1 (-t + 2t^2)dt = \frac{1}{4}$

(b) Soit $f \in E$. On a

$$|v(f)| \leqslant \int_0^1 |f(t)|.\left|(t - 2t^2)\right| dt \leqslant N_\infty(f)\int_0^1 \left|(t - 2t^2)\right| dt = \frac{1}{4}N_\infty(f)$$

Donc v continue de E dans $\mathbb{R}$ et d'après la partie 1°, $|||v||| = \sup(\frac{|v(f)|}{N_\infty(f)}, f \in E, f \neq 0) \leqslant \frac{1}{4}$

(c) On pose $\forall t \in [0, 1], f(t) = a + bt$.

(i) Calculer $v(f) = \int_0^1 (a + bt).(t - 2t^2).dt = a\int_0^1 (t - 2t^2)dt + b\int_0^1 (t^2 - 2t^3)dt = -\frac{1}{6}a - \frac{1}{6}b$

(ii) $N_\infty(f) = \max(|a + bt|, t \in [0, 1])$. Envisageons deux cas

si $b \geqslant 0$, pour tout $t \in [0, 1]$, $a \leqslant a + bt \leqslant a + b$ donc $|a + bt| \leqslant \max(|a|, |a + b|)$ avec égalité pour $t = 0$ ou $t = 1$

de même si $b \leqslant 0$,pour tout $t \in [0, 1]$, $a + b \leqslant a + bt \leqslant a$ donc $|a + bt| \leqslant \max(|a|, |a + b|)$ avec égalité pour $t = 0$ ou $t = 1$

Donc $\max(|a + bt|, t \in [0, 1]) = \max(|a|, |a + b|) = N_\infty(f)$

(iii)

$$|||v||| = \sup(\frac{\frac{|a+b|}{6}}{\max(|a|, |a + b|)}, (a, b) \neq (0, 0))$$

or $\frac{|a+b|}{6} \leqslant \frac{1}{6}\max(|a|, |a + b|)$ avec égalité pour $a = 1$ et $b = 0$ donc

$$|||v||| = \frac{1}{6}$$

l'égalité a lieu pour la fonction $f_0(t) = 1$

4. **Cas d'une application de $\mathbb{R}_k[X]$ dans $\mathbb{R}_{k+1}[X]$ pour une norme particulière**
Soit $E_k = \mathbb{R}_k[X]$ muni de la norme $\|P\| = \sum_{i=0}^{k} |P(i)|$ On considère l'application

$$F_k : \begin{cases} E_k \to E_{k+1} \\ P \to X^2 P' \end{cases}$$

(a) $\|P\| = \sum_{i=0}^{k} |P(i)| \geqslant 0$
$\|P+Q\| = \sum_{i=0}^{k} |P(i)+Q(i)| \leqslant \sum_{i=0}^{k} |P(i)| + |Q(i)| = \|P\| + \|Q\|$
$\|\lambda P\| = \sum_{i=0}^{k} |\lambda P(i)| = |\lambda| \, \|P\|$
si $P \in E_k$ et $\|P\| = 0$ alors $P(0) = P(1) = ... = P(k) = 0$ donc P admet $k+1$ racines or $\deg(P) \leqslant k$
donc $P = 0$
Ainsi $\|.\|$ définit bien une norme sur E_k

(b) $|||F_1||| = \sup(\frac{\|X^2P'\|}{\|P\|}, P = a + bX) = \sup(\frac{5|b|}{|a|+|a+b|}, (a,b) \neq (0,0))$
or $5|b| \leqslant 5(|a| + |a+b|)$ avec égalité pour $a = 0$. Ainsi

$$|||F_1||| = 5$$

(c)

$$|||F_2||| = \sup(\frac{\|X^2P'\|}{\|P\|}, P = a + bX + cX^2) = \sup(\frac{|b+2c| + 4|b+4c| + 9|b+6c|}{|a| + |a+b+c| + |a+2b+4c|}, (a,b,c) \neq (0,0))$$

l'idée consiste à exprimer a, b, c en fonction de $x = a$, $y = a+b+c$ et $z = a + 2b + 4c$
en résolvant le système on obtient

$$a = x, b = -\frac{3}{2}x + 2y - \frac{1}{2}z, c = \frac{1}{2}x - y + \frac{1}{2}z$$

d'ou

$$b + 2c = \frac{-1}{2}x + \frac{1}{2}z, b + 4c = \frac{1}{2}x - 2y + \frac{3}{2}z, b + 6c = \frac{3}{2}x - 4y + \frac{5}{2}z$$

donc

$$|||F_2||| = \sup(\frac{\left|\frac{-1}{2}x + \frac{1}{2}z\right| + 4\left|\frac{1}{2}x - 2y + \frac{3}{2}z\right| + 9\left|\frac{3}{2}x - 4y + \frac{5}{2}z\right|}{|x| + |y| + |z|}, (x,y,z) \neq (0,0))$$

or

$$\begin{aligned} \left|\frac{-1}{2}x + \frac{1}{2}z\right| + 4\left|\frac{1}{2}x - 2y + \frac{3}{2}z\right| + 9\left|\frac{3}{2}x - 4y + \frac{5}{2}z\right| &\leqslant \frac{1}{2}|x| + \frac{1}{2}|z| + 4(\frac{1}{2}|x| + 2|y| + \frac{3}{2}|z|) + 9(\frac{3}{2}|x| + 4|y| + \frac{5}{2}|z|) \\ &= 16|x| + 44|y| + 29|z| \end{aligned}$$

donc

$$\frac{\left|\frac{-1}{2}x + \frac{1}{2}z\right| + 4\left|\frac{1}{2}x - 2y + \frac{3}{2}z\right| + 9\left|\frac{3}{2}x - 4y + \frac{5}{2}z\right|}{|x| + |y| + |z|} \leqslant 44$$

avec égalité pour $x = 0$ et $z = 0$ soit pour une fonction polynôme telle que $a = 0$ et $b + 2c = 0$, par exemple $P = -2X + X^2$. Vérifions ce résultat; $\frac{\|X^2P'\|}{\|P\|} = \frac{\|-2X^2+2X^3\|}{\|-2X+X^2\|} = \frac{|8|+|36|}{|-1|} = 44$
Conclusion

$$|||F_2||| = 44$$