

Problème

Dans tout le problème, n est un entier naturel supérieur ou égal à 2. Cet entier est quelconque sauf dans la partie I, où il est égal à 2.

On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'algèbre des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels, $(E_{i,j})$ sa base canonique ($1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq n$) et I_n sa matrice unité (tous les coefficients de $E_{i,j}$ sont nuls, sauf celui situé à la i^{e} ligne et à la j^{e} colonne, qui vaut 1).

On note $\mathbb{R}[X]$ l'algèbre des polynômes à coefficients réels.

Dans tout le problème, A est une matrice quelconque de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et u l'endomorphisme de \mathbb{R}^n canoniquement associé à la matrice A .

Pour tout $P = \sum_{k=0}^d a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$, on note $P(A) = \sum_{k=0}^d a_k A^k$. L'ensemble des matrices $P(A)$ pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$ est noté $\mathbb{R}[A]$.

On dit que P annule A lorsque $P(A) = 0$, ce qui équivaut à $P(u) = 0$. On appelle polynôme minimal de la matrice A le polynôme minimal de l'endomorphisme u ; c'est donc le polynôme unitaire de plus petit degré qui annule A .

On note ϕ_A l'application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$\phi_A(M) = AM - MA$$

L'objet du problème est d'étudier quelques propriétés des éléments propres de ϕ_A . Les parties I et II étudient la diagonalisabilité de ϕ_A , les parties III et IV en étudient les vecteurs propres.

Les quatre parties sont indépendantes.

Partie I. Étude du cas $n = 2$

Dans toute cette partie, on prendra $n = 2$.

1. Vérifier que l'application ϕ_A est linéaire et que I_2 et A appartiennent à $\ker \phi_A$.

Dans la suite de cette partie, on pose $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2. Donner la matrice de ϕ_A dans la base $(E_{1,1}, E_{2,2}, E_{1,2}, E_{2,1})$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Dans la suite de cette partie, on suppose que $\phi_A \neq 0$ (c'est-à-dire que $A \neq \lambda I_2$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$).

3. Donner le polynôme caractéristique de ϕ_A sous forme factorisée (on pourra utiliser la calculatrice).
4. En déduire que ϕ_A est diagonalisable si et seulement si $(d - a)^2 + 4bc > 0$.
5. Démontrer que ϕ_A est diagonalisable si et seulement si A est diagonalisable.

Partie II. Étude du cas général

On note $c = (c_1, \dots, c_n)$ la base canonique de \mathbb{R}^n .

6. On suppose dans cette question que A est diagonalisable.

On note $e = (e_1, \dots, e_n)$ une base de vecteurs propres de u (défini au début du problème) et, pour tout entier i tel que $1 \leq i \leq n$, λ_i la valeur propre associée au vecteur e_i . On note alors P la matrice de

passage de la base c à la base e et $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$.

Enfin, pour tout couple (i, j) d'entiers tels que $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq n$, on pose :

$$B_{i,j} = PE_{i,j}P^{-1}$$

- a. Exprimer, pour tout couple (i, j) , la matrice $DE_{i,j} - E_{i,j}D$ en fonction de la matrice $E_{i,j}$ et des réels λ_i et λ_j .
- b. Démontrer que, pour tout couple (i, j) , $B_{i,j}$ est un vecteur propre de ϕ_A .

- c. En déduire que ϕ_A est diagonalisable.
7. On suppose dans cette question que ϕ_A est diagonalisable en tant qu'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
On note $(P_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ une base de vecteurs propres de ϕ_A et, pour tout couple (i, j) , $\lambda_{i,j}$ la valeur propre associée à $P_{i,j}$.
- a. Dans cette question, on considère A comme une matrice à coefficients complexes ($A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$) et ϕ_A comme un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (défini par $\phi_A(M) = AM - MA$ pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$).
- Justifier que toutes les valeurs propres de ϕ_A sont réelles.
 - Soit $z \in \mathbb{C}$. Justifier que si z est une valeur propre de A , alors z est aussi une valeur propre de tA .
 - Soit $z \in \mathbb{C}$. On suppose que z et \bar{z} sont deux valeurs propres de la matrice A . On considère alors $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ ($X \neq 0$) et $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ ($Y \neq 0$) tels que $AX = zX$ et ${}^tAY = \bar{z}Y$.
En calculant $\phi_A(X{}^tY)$, démontrer que $z - \bar{z}$ est une valeur propre de ϕ_A .
- b. En déduire que la matrice A a au moins une valeur propre réelle.
On note λ une valeur propre réelle de A et $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ ($X \neq 0$) une matrice colonne telle que $AX = \lambda X$.
- c. Démontrer que, pour tout couple (i, j) , il existe un réel $\mu_{i,j}$, que l'on exprimera en fonction de λ et $\lambda_{i,j}$, tel que $AP_{i,j}X = \mu_{i,j}P_{i,j}X$.
- d. En déduire que A est diagonalisable.

Partie III. Étude des vecteurs propres de ϕ_A associés à la valeur propre 0

Soit m le degré du polynôme minimal de A .

8. Démontrer que la famille (I_n, A, \dots, A^{m-1}) est une base de $\mathbb{R}[A]$.
9. Vérifier que $\mathbb{R}[A]$ est inclus dans $\ker \phi_A$ et en déduire une minoration de $\dim \ker \phi_A$.
10. *Un cas d'égalité*

On suppose que l'endomorphisme u (défini au début du problème) est nilpotent d'indice n (c'est-à-dire que $u^n = 0$ et $u^{n-1} \neq 0$). On considère un vecteur y de \mathbb{R}^n tel que $u^{n-1}(y) \neq 0$ et, pour tout entier i tel que $1 \leq i \leq n$, on pose $e_i = u^{n-i}(y)$.

- a. Démontrer que la famille (e_1, e_2, \dots, e_n) est une base de \mathbb{R}^n .
- b. Soient $B \in \ker \phi_A$ et v l'endomorphisme de \mathbb{R}^n canoniquement associé à B .

Démontrer que si $v(y) = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$ ($\alpha_i \in \mathbb{R}$) alors $v = \sum_{i=1}^n \alpha_i u^{n-i}$.

- c. En déduire $\ker \phi_A$.
11. *Cas où u est diagonalisable*
On suppose que u est diagonalisable. On note $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ ($1 \leq p \leq n$) les p valeurs propres distinctes de u et, pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq p$, $E_u(\lambda_k)$ le sous-espace propre associé à la valeur propre λ_k . On note m_k la dimension de cet espace propre.
- a. Soient $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et v l'endomorphisme de \mathbb{R}^n canoniquement associé à B . Démontrer que $B \in \ker \phi_A$ si et seulement si, pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq p$, $E_u(\lambda_k)$ est stable par v (c'est-à-dire $v(E_u(\lambda_k)) \subset E_u(\lambda_k)$).
- b. En déduire que $B \in \ker \phi_A$ si et seulement si la matrice de v , dans une base adaptée à la décomposition de \mathbb{R}^n en somme directe des sous-espaces propres de u , a une forme que l'on précisera.
- c. Préciser la dimension de $\ker \phi_A$.
- d. Lorsque $n = 7$, donner toutes les valeurs possibles pour cette dimension en envisageant les différentes valeurs possibles de p et des m_k (on ne demande pas de justification).

Partie IV. Étude des vecteurs propres de ϕ_A associés à une valeur propre non nulle

Dans cette partie, α est une valeur propre non nulle de ϕ_A et B un vecteur propre associé ($B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $B \neq 0$). On note π_B le polynôme minimal de B et d le degré de π_B .

12. Démontrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\phi_A(B^k) = \alpha k B^k$.
13. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Exprimer $\phi_A(P(B))$ en fonction de α , B et $P'(B)$.
14. Démontrer que le polynôme $X\pi'_B - d\pi_B$ est le polynôme nul (π'_B étant le polynôme dérivé du polynôme minimal de la matrice B).
15. En déduire que $B^d = 0$.