Pour le lundi 16 octobre 2017

Vous chercherez les exercices 1, 2 et 3, mais vous ne rédigerez que l'exercice 3 sur votre copie.

Famille de vecteurs

Exercice : Liberté ?

Les familles suivantes de $\mathbb{R}^4$ *sont-elles libres ou liées ? Fournir des relations de dépendance linéaire quand ces relations existent.*

1. (e_1, e_2, e_3) *où* $e_1 = (3, 0, 1, -2)$, $e_2 = (1, 5, 0, -1)$ *et* $e_3 = (7, 5, 2, 1)$.
2. (e_1, e_2, e_3, e_4) *où* $e_1 = (1, 1, 1, 1)$, $e_2 = (1, 1, 1, -1)$, $e_3 = (1, 1, -1, 1)$ *et* $e_4 = (1, -1, 1, 1)$.
3. (e_1, e_2, e_3, e_4) *où* $e_1 = (0, 0, 1, 0)$, $e_2 = (0, 0, 0, 1)$, $e_3 = (1, 0, 0, 0)$ *et* $e_4 = (0, 1, 0, 0)$.
4. (e_1, e_2, e_3, e_4) *où* $e_1 = (2, -1, 3, 1)$, $e_2 = (1, 1, 1, 1)$, $e_3 = (4, 1, 5, 3)$ *et* $e_4 = (1, -2, 2, 0)$.

Sous espaces

Exercice : Opérations sur les sous-espaces

Soient F *et* G *deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel* E.

1. *Montrer que* $F \cap G$ *est un sous espace de* E.
2. $\overline{F}$ *est-il un sous espace de* E *?*
3. *Montrer que :* $[(F \cup G \text{ sous-espace de } E) \Leftrightarrow (F \subset G \text{ ou } G \subset F)]$.
   (S'inspirer du résultat sur l'union de sous groupes)

Exercice : Formule de Grassman

Soient F, G *et* H *trois sous-espaces d'un espace vectoriel* E *de dimension finie sur* $\mathbb{K}$.
Montrer que : $dim(F + G + H) \leqslant dimF + dimG + dimH - dim(F \cap G) - dim(G \cap H) - dim(H \cap F) + dim(F \cap G \cap H)$.
Trouver un exemple où l'inégalité est stricte.

Problème :

Problème 2 : Résultant de deux polynômes

Définition et propriétés

Soient p et q deux naturels non nuls et soient

$$P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k \quad \text{et} \quad Q = \sum_{k=0}^{q} b_k X^k$$

deux polynômes de $\mathbb{C}[X]$ avec $a_0, ..., a_p \in \mathbb{C}$, $a_p \neq 0$, $b_0, ..., b_q \in \mathbb{C}$, $b_q \neq 0$.

On définit un nombre complexe appelé le résultant des polynômes P et Q et noté $Res(P, Q)$ comme étant égal à la valeur du déterminant à $p + q$ colonnes suivant :

$$Res(P,Q) = \begin{vmatrix}
a_0 & 0 & \dots & \dots & 0 & b_0 & 0 & \dots & 0 \\
a_1 & a_0 & \ddots & & \vdots & b_1 & b_0 & \ddots & \vdots \\
a_2 & a_1 & a_0 & \ddots & \vdots & b_2 & b_1 & \ddots & 0 \\
\vdots & & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \ddots & \ddots & b_0 \\
a_p & & & \ddots & a_0 & \vdots & & \ddots & b_1 \\
0 & a_p & & & a_1 & b_q & & & b_2 \\
\vdots & \ddots & a_p & \vdots & a_2 & 0 & b_q & \vdots & \vdots \\
\vdots & & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\
0 & \dots & \dots & 0 & a_p & 0 & \dots & 0 & b_q
\end{vmatrix}$$

Les q premières colonnes contiennent les coefficients de P à chaque fois décalés d'un rang vers le bas, et les p suivantes ceux de Q, les autres positions étant remplies avec des zéros.

Par exemple si $P=1+2X+3X^2$ et $Q=4+5X+6X^2+7X^3$

$$Res(P,Q)=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 6 & 5 \\ 0 & 3 & 2 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 7 \end{vmatrix}$$

La matrice servant à définir $Res(P,Q)$ pourra être notée $M_{P,Q}$:

$$Res(P,Q)=\det M_{P,Q}$$

On note $E=\mathbb{C}_{q-1}[X]\times\mathbb{C}_{p-1}[X]$ et $F=\mathbb{C}_{p+q-1}[X]$.
Pour $(A,B)\in E^2$ on pose

$$u(A,B)=PA+QB$$

1. Cas où u est bijective

a. Démontrer que pour $(A,B)\in E^2$ on a $u(A,B)\in F$.
On définit ainsi une application

$$u:\left\{\begin{array}{ccc} E & \to & F \\ (A,B) & \mapsto & PA+QB \end{array}\right.$$

b. Démontrer que u est une application linéaire.

c. Si on suppose que u est bijective, démontrer que P et Q sont premiers entre eux.

d. Si on suppose que P et Q sont premiers entre eux, déterminer $Ker(u)$ et en déduire que u est bijective

Matrice de u

On note

$$B=\big((1,0),(X,0),...,(X^{q-1},0),(0,1),(0,X),...,(0,X^{p-1})\big)$$

2. Montrer que B est une base de E.

3. On note B' la base canonique de F. Rappeler l'expression de B' et la dimension de F.

4. a. Donner l'expression de $u(X^i,0)$ pour $i\in[0,q-1]$ puis de $u(0,X^j)$ pour $j\in[0,p-1]$.

b. En déduire la matrice de u exprimée dans les bases B et B' de E et F.

c. Démonter que $Res(P,Q)\neq 0$ si et seulement si P et Q sont premiers entre eux.

d. En déduire que $Res(P,Q)=0$ si et seulement si P et Q ont au moins une racine commune complexe.

Application 1 : existence d'une racine multiple

5. a. Démontrer qu'un polynôme P de $\mathbb{C}[X]$ admet une racine multiple dans $\mathbb{C}$ si et seulement si on a $Res(P,P')=0$

b. *Application :* déterminer une condition nécessaire et suffisante sur des complexes a et b pour que le polynôme X^3+aX+b admette une racine multiple.

Application 2 : une courbe paramétrée

Soit $t\in\mathbb{R}$. On envisage l'ensemble Γ des points $M(t)$ de coordonnées $(x(t),y(t))$ avec $x(t)=t^2+t$ et $y(t)=t^2-t+1$.
On pose pour $(x,y,t)\in\mathbb{R}^3$

$$A_x(t)=t^2+t-x \text{ et } B_y(t)=t^2-t+1-y.$$

6. Établir que si un point M de coordonnées (x,y) appartient à Γ, alors les fonctions polynomiales A_x et B_y ont une racine commune.

7. En déduire qu'un point M de coordonnées (x,y) appartenant à la courbe Γ vérifie

$$x^2+y^2-2xy-4y+3=0.$$

Application 3 : nombre algébrique

8. En utilisant les polynômes $P=X^2-3$ et $Q_y=(y-X)^2-7$ pour $y=\sqrt{3}+\sqrt{7}$, déterminer un polynôme R de degré 4 à coefficients entiers tel que y soit une racine de R (on dit que y est un nombre algébrique).

9. Quelles sont les autres racines du polynôme R ?