Pour le lundi 2 octobre 2017

Exercice 1

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 \\ -3 & 3 & -4 \\ -3 & 4 & -5 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice A dans la base canonique.

1. On se propose de démontrer que A est semblable à la matrice $A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et de trouver une matrice de passage.

  a. Déterminer les deux sous-espaces vectoriels $Ker(f + Id_{\mathbb{R}^3}$ et $Ker(f - 2Id_{\mathbb{R}^3}$.

  b. On note $\beta' = (u, v, w)$ une base de $\mathbb{R}^3$ telle que $Mat_{\beta'}(f) = A'$. Préciser à l'aide de la question précédente deux vecteurs u et w qui conviennent. Déterminer alors un troisième vecteur v convenable à l'aide d'un système d'équations linéaires.

  c. Préciser la matrice de passage P de la base β à la base β' puis la relation entre A et A'.

  d. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer les matrices suivantes : $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^n$ puis $(A')^n$. En déduire A^n.

2. On définit pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice $\exp(M) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \dfrac{1}{k!} M^k$. On admet que cette limite existe.

  a. Rappeler lorsque $x \in \mathbb{R}$ la valeur de $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \dfrac{1}{k!} x^k$.

  b. En déduire la matrice $\exp(A')$, puis une formule pour $\exp(A)$.

3. Bonus : Imaginer une méthode permettant de déterminer une matrice B telle que $B^2 = A$.

Exercice 2

1. Résoudre dans $\mathbb{Z}/19\mathbb{Z}$ l'équation $\dot{x}^3 = 1$.
2. Résoudre dans $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$ l'équation $\dot{x}^4 = 1$.
3. Déterminer une fonction Python `racineCubique(a,n)` dont les arguments sont deux entiers naturels `a` et `n`, qui renvoie tous les entiers $k \in [0, n-1]$ tels que $(k \bmod n)^3 = $ `a`.
4. Démontrer le théorème d'Euler :
   Soit $n \geq 2$. Pour tout $x \in \mathbb{Z}$, si x et n sont premiers entre eux, alors $x^{\varphi(n)} \equiv (1 \bmod n)$.
5. Rappeler la définition d'un générateur d'un groupe multiplicatif $(G, \cdot)$.
   Quel est le nombre de générateurs du groupe $(\mathbb{U}_{2016}, \times)$? (on détaillera les calculs)

Problème 1

Soit u un endomorphisme de E.
On note $u^k = u \circ u \circ \ldots \circ u$ (composée k fois). Par convention, $u^0 = Id_E$.
On dit que u est nilpotent d'ordre $r \in \mathbb{N}^*$ si et seulement si $u^r = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $u^{r-1} \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Question 0. (Hors barème) Rappeler l'énoncé du théorème du rang pour une application linéaire en dimension finie.

Partie 1 : un premier exemple

Dans cette partie, E_1 désigne un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ dont une base est $\beta = (e_1, e_2, e_3, e_4)$? Soit f_1 l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base β est :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer le rang de f_1 et donner une base de l'image de f_1, une base du noyau de f_1 en fonction des vecteurs de la base β.

2. Calculer M^2, M^3 et montrer qu'il existe une matrice A telle que pour tout entier $p \geq 2$, il existe un réel α_p vérifiant $M^p = \alpha_p A$. Expliciter alors M^p.
3. Donner une base de chacun des sous espaces vectoriels $\mathrm{Im} f_1^2$, $\mathrm{Ker} f_1^2$, $\mathrm{Im} f_1^3$, $\mathrm{Ker} f_1^3$.
4. Déterminer pour tout $k \geq 2$, $\mathrm{Im} f_1^k$, $\mathrm{Ker} f_1^k$.
5. Montrer que $E = \mathrm{Im} f_1^2 \oplus \mathrm{Ker} f_1^2$.

Partie 2 : noyaux itérés et images itérées : résultats généraux

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$.
On pose $N_k = \mathrm{Ker}(f^k)$ et $I_k = \mathrm{Im}(f^k)$.
On dit qu'une suite (A_n) d'ensembles est croissante (resp. décroissante) pour l'inclusion si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N}, A_n \subset A_{n+1}$ (resp. $A_{n+1} \subset A_n$).

1. **a.** Démontrer que la suite $(N_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est croissante pour l'inclusion puis que la suite $(I_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est décroissante pour l'inclusion.
   b. Justifier l'existence d'un plus petit entier naturel p_0 tel que $N_{p_0} = N_{p_0+1}$.
   c. Ce résultat est-il encore vrai en dimension infinie ? (on pourra répondre après avoir regardé la partie 3...)
   d. Soit un tel p_0. Montrer que $\forall k \geq 0, N_{p_0} = N_{p_0+k}$.
2. **a.** Démontrer que les suites $(N_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(I_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sont stationnaires à partir du même rang p_0.
   b. Démontrer que $N_{p_0} \oplus I_{p_0} = E$.
3. Montrer que la restriction de f à I_{p_0} est un automorphisme de I_{p_0}.
4. Montrer que la restriction de f à N_{p_0} est un endomorphisme nilpotent de N_{p_0} et déterminer son ordre.
5. Démontrer que la suite $(\dim(N_{k+1}) - \dim(N_k))_{k\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
6. Montrer que si g est un endomorphisme nilpotent de E, son ordre de nilpotence est inférieur ou égal à $\dim(E)$.
7. On admet que le polynôme caractéristique d'un endomorphisme est égal au polynôme caractéristique de n'importe quelle matrice représentant g dans une base de E.
   Déterminer le polynôme caractéristique d'un endomorphisme nilpotent ?
8. Quel est le polynôme minimal d'un endomorphisme nilpotent d'ordre r ?

Partie 3 : un autre exemple

Soit $E = \mathbb{R}[X]$ et $P \in E$. On définit $\Delta(P) = P(X+1) - P(X)$.

1. Montrer que Δ est un endomorphisme de E.
2. Déterminer rigoureusement le noyau de Δ, puis pour tout $k \geq 2$, le noyau de Δ^k.
   L'endomorphisme Δ est-il nilpotent ?
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\Delta(\mathbb{R}_n[X]) \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$.
   On note δ l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ tel que $\delta(P) = P(X+1) - P(X)$ (δ est la restriction de Δ à $\mathbb{R}_n[X]$).
   a. Déterminer l'image de δ^k pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. En déduire l'image de Δ.
   b. Justifier que δ est un endomorphisme nilpotent et déterminer son ordre de nilpotence.
4. **a.** Montrer que pour tout entier naturel p, $\delta^p(P) = \sum_{k=0}^{p} (-1)^{p-k} \binom{p}{k} P(X+k)$.
   b. En déduire l'existence de réels $(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tels que pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$,
   $P(X) = \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k P(X+k)$.