EXERCICE

On note $A = \{n + m\sqrt{2} | (n,m) \in \mathbb{Z}^2\}$. On rappelle que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

1. Démontrer que si $x \in A$, il existe un unique couple $(n,m) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $x = n + m\sqrt{2}$. Démontrer que A muni des lois usuelles $+, \times$ est un anneau (on pourra regarder la définition d'un anneau donnée dans le chapitre 2).

2. On pose pour tout $x = n + m\sqrt{2} \in A$, $\phi(x) = n - m\sqrt{2}$. Démontrer que ϕ est une application bijective de A dans A, puis que ϕ est un morphisme pour les deux lois et enfin que $\phi(1) = 1$.

3. On pose pour tout $x = n + \sqrt{2}m \in A$, $N(x) = x \cdot \phi(x) = n^2 - 2m^2$. Démontrer à l'aide de ϕ que si $(x,y) \in A^2$, alors $N(xy) = N(x)N(y)$.

4. On note A^* l'ensemble des éléments inversibles de A. Démontrer que A^* est un groupe pour $\times$. Démontrer à l'aide de la question précédente que $x = n + \sqrt{2}m \in A^* \Leftrightarrow N(x) = 1$ ou $N(x) = -1$.

5. Démontrer que $1 + \sqrt{2} \in A^*$ puis que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(1 + \sqrt{2})^n \in A^*$.

6. Soit $x = a + b\sqrt{2} \in A^*$ avec $(a,b) \in (\mathbb{N}^*)^2$.
   (a) Montrer que $b \leq a < 2b$
   (b) On pose $\dfrac{a + b\sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} = a_1 + b_1\sqrt{2}$. Montrer que $0 < a_1 \leq a$ et $0 \leq b_1 < b$.
   (c) En déduire qu'il existe un entier naturel n tel que $x = (1 + \sqrt{2}^n)$ et déterminer alors A^*.

PROBLEME

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On effectue une succession de n lancers indépendants d'une pièce donnant Pile avec la probabilité $p \in]0,1[$ et Face avec la probabilité $q = 1 - p$.
On va s'intéresser dans ce problème aux successions de lancers amenant un même côté.
On dit que la première série est de longueur $m \in [1, n-1]$ si les m premiers lancers ont amené le même côté de la pièce et le $(m+1)$-ième l'autre côté et on dit que la première série est de longueur n si les n lancers int amené le mÃªme cÃ´té de la pièce.
De même la deuxième série commence au lancer suivant la fin de la première série et se termine au lancer précédant un changement de côté ou bien au n-ième lancer.
On définit de même les séries suivantes.
Ω_n désigne l'ensemble des successions de Pile ou Face des n lancers.
Pour $i \in \mathbb{N}^\times$, on note P_i l'événement " le i-ième lancer amène Pile " et F_i l'événement contraire. Les trois parties sont indépendantes.

Partie I : Etude des longueurs de séries.

1. On note L_1 la longueur de la première série.
   Déterminer $L_1(\Omega_n)$ puis exprimer l'événement $(L_1 = m)$ pour $m < n$ à l'aide des événements P_i et F_i pour i entier naturel variant entre 1 et $m + 1$.
   En déduire la probabilité $P(L_1 = m)$ pour $m < n$ puis la probabilité $P(L_1 = n)$.

2. On note L_2 la longueur de la deuxième série s'il y en a une et on pose $L_2 = 0$ s'il n'y a pas de deuxième série.
   (a) Déterminer $L_2(\Omega_n)$.
   (b) On suppose que $m + k < n$. Exprimer l'événement $(L_1 = m) \cap (L_2 = k)$ à l'aide des événements P_i et F_i pour i entier naturel variant entre 1 et $m + k + 1$ puis calculer la probabilité de l'événement $(L_1 = m) \cap (L_2 = k)$.
   (c) On suppose que $m + k = n$. Calculer la probabilité de l'événement $(L_1 = m) \cap (L_2 = k)$.
   (d) En déduire la valeur de $P(L_2 = k)$, pour $k \in [1, n-1]$ puis $P(L_2 = 0)$.

Partie II : Etude du nombre de séries lors des n premiers lancers.

On considère dans toute cette partie que la pièce est **équilibrée, c'est-à-dire que** $p = \frac{1}{2}$. On suppose que l'on effectue $n \geq 3$ lancers indépendants et on note N_k le nombre de séries **lors des k premiers lancers** :
Par exemple, si $n = 11$ et si les lancers successifs donnent : FFPPPPFFPPP... (F désignant Face et P Pile), on a pour une telle succession $\omega \in \Omega$,

$$N_1(\omega) = N_2(\omega) = 1; \mathbb{Q}uad N_3(\omega) = \cdots = N_6(\omega) = 2;$$

$$N_7(\omega) = N_8(\omega) = 3; \mathbb{Q}uad N_9(\omega) = \cdots = N_{11}(\omega) = 4;$$

les données précédentes ne permettant évidemment pas de déterminer $N_{12}(\omega)$.
On admettra que N_k est une variable aléatoire sur Ω_n.

1. Déterminer les lois de N_1, N_2 et N_3 et donner leurs espérances.

2. Déterminer $N_n(\Omega_n)$ puis calculer les valeurs de $P(N_n = 1)$ et $P(N_n = n)$.

3. Simulation informatique.
   Éxrire un programme informatique pour que, n étant une valeur entière, inférieure à 100, `simulation(m)` simule les m variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_n$ à valeurs dans **Pile** ou **Face** et dont les valeurs seront placées dans une liste `X`) et détermine alors les valeurs de $N_1, N_2, \ldots, N_n$ (qui seront stockées dans une liste `N`).

   En simulant 1000 expériences avec $n = 11$, estimer l'espérance et la variance de N_{11}.

4. **Fonctions génératrices de N_n.**
   On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et pour $s \in [0, 1]$,

$$G_n(s) = \sum_{k=1}^{n} P(N_n = k) s^k$$

   (a) Pour $s \in [0, 1]$, comparer l'espérance de la variable aléatoire s^{N_n} avec $G_n(s)$.
   (on rappelle que si f est une application définie sur $X(\Omega) = \{x_i, i \in [1, p]\}$, et si $Y = f(X)$, alors le théorème de transfert assure que $E(Y) = \sum_{k=1}^{p} P(X = x_i) f(x_i)$.

   (b) Que représente $G_n'(1)$?

   (c) Montrer que pour tout $n \geqslant 2$ et tout $k \in 1, \ldots, n$ on a

$$P((N_n = k) \cap P_n) = \frac{1}{2} P((N_{n-1} = k) \cap P_{n-1}) + \frac{1}{2} P((N_{n-1} = k - 1) \cap F_{n-1})$$

   On admet que l'on obtiendrait de même

$$P((N_n = k) \cap F_n) = \frac{1}{2} P((N_{n-1} = k) \cap F_{n-1}) + \frac{1}{2} P((N_{n-1} = k - 1) \cap P_{n-1})$$

   Montrer alors que

$$P(N_n = k) = \frac{1}{2} P(N_{n-1} = k) + \frac{1}{2} P(N_{n-1} = k - 1)$$

   (d) Soit $n \geqslant 2$. Montrer que

$$G_n(s) = \frac{1 + s}{2} G_{n-1}(s)$$

   Calculer $G_1(s)$ et en déduire que

$$G_n(s) = \left(\frac{1 + s}{2} \right)^{n-1} s$$

   (e) Déterminer le nombre moyen de séries dans les n premiers lancers.