

Exercice 1 : Normes équivalentes

1. Soit f dans E . f est de classe C^1 sur $I = [0, 1]$, donc $|f'|$ est continue sur I , et donc $\|f\|$ a bien un sens.

$$* \forall f, g \in E, \|f + g\| = |(f + g)(0)| + \int_0^1 |(f + g)'(t)| dt \leq |f(0)| + |g(0)| + \int_0^1 |f'(t)| + |g'(t)| dt = \|f\| + \|g\|.$$

$$* \forall f \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \|\lambda f\| = |\lambda f(0)| + \int_0^1 |(\lambda f)'(t)| dt = |\lambda| |f(0)| + |\lambda| \int_0^1 |f'(t)| dt = |\lambda| \|f\|$$

$$* \forall f \in E, \|f\| \geq 0$$

$$* \forall f \in E, \|f\| = 0 \Rightarrow |f(0)| = 0 \text{ et } \int_0^1 |f'(t)| dt = 0 \text{ car ces 2 nombres sont positifs et de somme nulle.}$$

Or $|f'|$ est continue et positive et d'intégrale nulle, donc $f' = 0$, i.e. f est constante. Or $f(0) = 0$, donc f est nulle.

$\|\cdot\|$ est bien une norme sur E .

2. (i.) N_1 et N_2 sont des normes équivalentes sur E si et seulement si

$$\exists a > 0, \exists b > 0 \text{ tq } \forall u \in E, aN_1(u) \leq N_2(u) \leq bN_1(u)$$

$$(ii.) \forall f \in E, \|f\| = |f(0)| + 2 \int |f'| \leq 4|f(0)| + 2 \int |f'| = 2 \|f\|'$$

$$\text{De même } \|f\|' = 2|f(0)| + \int |f'| \leq 2|f(0)| + 4 \int |f'| = 2 \|f\| \text{ Et donc}$$

$$\forall f \in E, \frac{1}{2} \|f\| \leq \|f\|' \leq 2 \|f\|. \text{ Les normes sont équivalentes.}$$

3. Prenons la norme sur E définie par $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt$, et considérons la suite (f_n) de fonctions de E définie par $\forall x \in \mathbb{R}, f_n(x) = x^n$.

$$\|f_n\|_1 = \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1}, \text{ qui converge vers } 0 \text{ et } \|f_n\| = 0 + 2 \int_0^1 f_n'(t) dt = 2(f_n(1) - f_n(0)) = 2$$

Il n'existe donc pas de réel $a > 0$ tel que $\forall f \in E, a \|f\| \leq \|f\|_1$, ces deux normes ne sont pas équivalentes.

Exercice 2 : Continuité d'une fonction définie par une intégrale

1. Cours :

$$\left. \begin{array}{l} \forall x \in I, t \rightarrow g(x, t) \text{ est } C^0 \text{ - P.M. sur } J \\ \forall t \in J, x \rightarrow g(x, t) \text{ est continue sur } I \\ \exists \varphi \in \mathcal{CM}(J, \mathbb{R}^+) \text{ tq } \forall x \in I, \forall t \in J, |g(x, t)| \leq \varphi(t) \\ \text{avec } \varphi \text{ intégrable sur } J \end{array} \right\} \Rightarrow f : x \rightarrow \int_J g(x, t) dt \text{ est continue sur } I.$$

2. Soit $g : \mathbb{R} \times [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x, t) = \frac{\arctan(xt)}{1+t^2}$

$\forall t \geq 0, x \rightarrow g(x, t)$ est continue sur \mathbb{R} .

$$\forall x \in \mathbb{R}, |g(x, t)| \leq \frac{\pi}{2(1+t^2)}. \text{ Or la fonction } t \rightarrow \frac{1}{1+t^2} \text{ est intégrable sur } [0, +\infty[.$$

On en déduit que $\forall x \in \mathbb{R}, t \rightarrow g(x, t)$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ (majorée en valeur absolue par une fonction intégrable) et que l'hypothèse de domination est satisfaite avec la fonction $\varphi : t \rightarrow \frac{\pi}{2(1+t^2)}$.

Alors, par le théorème cité au dessus, la fonction f_1 est continue sur \mathbb{R}

3. $\forall (x, t) \in \mathbb{R}_+^2, xe^{-xt} \geq 0. \forall M > 0, \int_0^M xe^{-xt} dt = [-e^{-xt}]_{t=0}^M = 1 - e^{-xM}$. Et en faisant tendre M vers $+\infty$ on obtient : $\forall x > 0, f_2(x) = 1$ et $f_2(0) = 0$.

La fonction f_2 n'est pas continue en 0, donc pas continue sur $[0, +\infty[$.

On vérifie ainsi que, sans l'hypothèse de domination, le théorème est faux : la fonction f de l'introduction peut ne pas être continue sur I .

Problème : Comparaison de convergences

Partie I

1. (a.) La série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur I si et seulement si la série numérique $\sum \|f_n\|_\infty$ converge sur \mathbb{R}_+ , où $\|f\|_\infty = \text{Sup}\{|f(x)|/x \in I\}$, appelée norme de la convergence uniforme.
(pour que cette définition ait un sens, il faut que les fonctions soient bornées sur I , de manière à pouvoir parler de la norme infinie)

(b.) $\forall x \in I$, $0 \leq |f_n(x)| \leq \|f_n\|_\infty$ et par comparaison de séries à termes positifs, on en déduit que si $\sum f_n$ converge normalement, alors pour tout x de I , la série $\sum |f_n(x)|$ converge, i.e. la série $\sum f_n$ converge absolument

2. Pour x dans I notons $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)$. Alors $|R_n(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \|f_k\|_\infty$. La série $\sum f_n$ convergeant normalement, la suite $\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} \|f_k\|_\infty\right)_n$ converge vers 0 indépendamment de x , ce qui prouve que la suite des restes $(R_n(x))_n$ converge uniformément vers 0 sur I , i.e. la série $\sum f_n$ converge uniformément sur I .

3. Pour x fixé dans $I = [0, 1]$, $|f_n(x)| = \frac{x^2}{n} + \frac{1}{n}$ et donc la suite $(|f_n(x)|)_n$ décroît et converge vers 0. Le CSSA est applicable, ce qui prouve que la série $\sum f_n$ converge simplement sur $I = [0, 1]$.

Le CSSA nous dit que, pour tout x de I , $|R_n(x)| \leq |f_{n+1}(x)| = \frac{x^2}{(n+1)^2} + \frac{1}{n} \leq \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n}$.

$\lim \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n} = 0$ donc la suite $(R_n(x))_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers 0, c'est à dire la série $\sum f_n$ converge uniformément sur $I = [0, 1]$.

Enfin, pour x fixé, $|f_n(x)| = \frac{x^2}{n^2} + \frac{1}{n}$. La série $\sum \frac{x^2}{n^2}$ converge (série de Riemann) mais la série $\sum \frac{1}{n}$ diverge (série harmonique), et donc la série $\sum |f_n(x)|$ diverge, i.e. la série $\sum f_n$ ne converge pas absolument sur I .

4. Considérons la fonction f_n définie sur $I = [0, 1[$ par $f_n(x) = x^n$. Pour x dans I , la série $\sum |f_n(x)| = \sum x^n$ converge vers $\frac{1}{1-x}$. Cette série $\sum f_n$ converge absolument sur $I = [0, 1[$.

Alors $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{x^{k+1}}{1-x}$. Montrons que cette suite de fonctions $(R_n(x))$ ne converge

pas uniformément vers 0. En effet $R_n(1 - \frac{1}{n}) = n \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n+1} = ne^{(n+1) \ln(1 - \frac{1}{n})} \sim \frac{n}{e}$ qui tend vers $+\infty$

avec n . Donc la suite (R_n) ne converge pas uniformément vers 0, et ainsi la série $\sum f_n$ est une série qui converge absolument sur $I = [0, 1[$ mais qui ne converge pas uniformément sur I .

Partie II

5. La suite (α_n) décroît et est positive, donc $\forall n$, $0 \leq \alpha_n \leq \alpha_0$. La suite $(\alpha_n)_n$ est donc bornée.
Soit $x \in I$. La série $\sum x^n$ converge (série géométrique de raison x avec $0 \leq x < 1$) et donc la série $\sum \alpha_0(1-x)x^n$ converge (linéarité).
 $\forall n \geq 1, \forall x \in I$, $0 \leq \alpha_n x^n (1-x) \leq \alpha_0(1-x)x^n$. Ainsi, par comparaison de séries à termes positifs, on conclut que la série $\sum f_n$ converge simplement sur I .

6. (a.) $\forall x \in I$, $f'_n(x) = \alpha_n(nx^{n-1} - (n+1)x^n) = \alpha_n x^{n-1}(n - x(n+1))$. En construisant le tableau de variations de f_n on établit que la fonction f_n positive admet sur I un maximum (absolu) au point $\frac{n}{n+1}$ qui vaut

$$f_n\left(\frac{n}{n+1}\right) = \alpha_n \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}. \text{ Donc } \|f_n\|_\infty = \alpha_n \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}.$$

$$(b.) \|f_n\|_\infty = \frac{\alpha_n}{n} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}.$$

$$\text{Or } \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = e^{(n+1)\ln(1-\frac{1}{n+1})}, \text{ et } (n+1)\ln(1-\frac{1}{n+1}) \sim (n+1)(-\frac{1}{n+1}) \sim -1.$$

$$\text{Donc } \lim \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} = e^{-1}.$$

Ainsi, $\|f_n\|_\infty \sim \frac{\alpha_n}{ne}$; de plus $\|f_n\| \geq 0$ et donc, par comparaison de séries positives,

$$\boxed{\sum \|f_n\|_\infty \text{ converge} \iff \sum \frac{\alpha_n}{n} \text{ converge.}}$$

$$7. (a.) \boxed{\sum_{k=n+1}^{+\infty} x^k = \frac{x^{n+1}}{1-x}.$$

(b.) On sait que la suite (α_n) décroît. Donc pour $k \geq n+1$, $\alpha_k \leq \alpha_{n+1}$.

Alors $\forall k \geq n+1$, $\alpha_k x^k (1-x) \leq \alpha_{n+1} (1-x) x^k$, et donc par inégalités sur les séries convergentes,

$$0 \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \alpha_k x^k (1-x) \leq \alpha_{n+1} (1-x) \sum_{k=n+1}^{+\infty} x^k = \alpha_{n+1} (1-x) \frac{x^{n+1}}{1-x} = \alpha_{n+1} x^{n+1} \leq \alpha_{n+1}.$$

La suite des restes $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \alpha_k x^k (1-x)$ est donc positive et majorée par une suite qui ne dépend pas de x et qui converge vers 0, ce qui prouve que la série $\sum f_n$ converge uniformément.

(c.) La suite (α_n) décroît et est minorée par 0, donc elle converge vers une limite positive ou nulle. Si cette limite ℓ est non nulle, alors pour tout n , $\alpha_n \geq \ell > 0$.

$$\text{Dans ces conditions pour tout } x \text{ dans } I, R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \alpha_k x^k (1-x) \geq \ell(1-x) \sum_{k=n+1}^{\infty} x^k = \ell x^{n+1}.$$

Mais alors, $R_n(1 + \frac{1}{n+1}) \geq \ell(1 - \frac{1}{n+1})^{n+1}$ qui converge vers $\frac{\ell}{e}$ (voir question 6.a.) donc ne converge pas vers 0, c'est à dire que la suite des restes ne converge pas uniformément vers la fonction nulle, ce qui contredit l'hypothèse.

Donc $\sum f_n$ converge uniformément sur I , si et seulement si la suite $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ converge vers 0.

8. (a.) Avec $\alpha_n = \frac{1}{n}$, la question 6.b. montre que la série $\sum f_n$ converge normalement (car $\frac{\alpha_n}{n} = \frac{1}{n^2}$ et la série $\sum \frac{1}{n^2}$ converge)

(b.) Il suffit de prendre $\alpha_n = 1$: la suite est constante, donc elle décroît (au sens large), et elle ne converge pas vers 0. Si on veut absolument une suite strictement décroissante, il suffit de prendre $\alpha_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{n}$

(c.) Il nous faut trouver une suite $(\alpha_n)_n$ positive décroissante, convergeant vers 0, mais telle que la série $\sum \frac{\alpha_n}{n}$ diverge.

La suite définie par $\alpha_n = \frac{1}{\ln(n)}$ pour $n \geq 2$ et $\alpha_1 = \alpha_2$ convient (elle est bien définie pour $n \geq 1$). Cette suite est décroissante et converge vers 0. Il reste à montrer que la série $\sum \frac{\alpha_n}{n}$ diverge.

La fonction $g : x \rightarrow \frac{2}{x \ln(x)}$ décroît sur $[2, +\infty[$ et est positive. La série $\sum_{n \geq 2} g(n)$ est donc de même nature

que l'intégrale $\int_2^\infty g(x) dx$. Or $\int_1^M g(x) dx = \int_1^M \frac{1}{x \ln(x)} dx = [\ln(\ln x)]_2^M = \ln(\ln M) - \ln(\ln 2)$ qui a pour limite $+\infty$ quand M tend vers $+\infty$. L'intégrale diverge, donc la série $\sum \frac{\alpha_n}{n}$ diverge, et donc $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge uniformément sur I mais ne converge pas normalement sur I .

9. CV Normale \Rightarrow CV Absolue \Rightarrow CV simple (\mathbb{R} est complet)
CV Normale \Rightarrow CV Uniforme \Rightarrow CV simple.
Aucune des réciproques n'est vraie. Et de plus :
CV absolue $\not\Rightarrow$ CV uniforme, et de même : CV uniforme $\not\Rightarrow$ CV absolue