devoir en temps libre 7
pour le vendredi 13 janvier 2017

Exercice 1 : Normes équivalentes (facultatif : pour réviser)

On note E l'espace vectoriel des applications de classe $\mathcal{C}^1$ définies sur l'intervalle $[0;1]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.
On pose pour $f \in E$:

$$\|f\| = |f(0)| + 2\int_0^1 |f'(t)|\ dt \quad \text{et} \quad \|f\|' = 2|f(0)| + \int_0^1 |f'(t)|\ dt.$$

1. Démontrer que $\|\ \|$ définit une norme sur E.
   De même, $\|\ \|'$ est une norme sur E, il est inutile de le démontrer.
2. a) Donner la définition de deux normes équivalentes.
   b) Démontrer que les deux normes $\|\ \|$ et $\|\ \|'$ sont équivalentes sur E.
3. Toutes les normes sur E sont-elles équivalentes à la norme $\|\ \|$?

Exercice 2 : Continuité d'une fonction définie par intégrale (obligatoire)

1. Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ et g une application de $I \times J$ dans $\mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in I$, la fonction $t \mapsto g(x,t)$ soit intégrable sur J.
   On pose, pour tout $x \in I$, $f(x) = \displaystyle\int_J g(x,t)\ dt$.
   Donner toutes les hypothèses du théorème de continuité d'une fonction définie par intégrale dépendant d'un paramètre permettant de conclure que la fonction f est continue sur I.
2. On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_1(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(xt)}{1+t^2}\ dt$.
   Démontrer que la fonction f_1 est continue sur $\mathbb{R}$.
3. On pose pour tout $x \in [0,+\infty[$, $f_1(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-xt}\ dt$.
   Calculer $f_2(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   La fonction f_2 est-elle continue sur $[0,+\infty[$?
   Que peut-on en conclure concernant l'hypothèse de domination ?

Dans tout le problème, $\sum f_n$ est une série de fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles.

Partie I

Une série de fonctions $\sum f_n$ converge absolument sur I lorsque, pour tout $x \in I$, la série $\sum |f_n(x)|$ converge. Dans les deux premières questions on supposera, pour simplifier les démonstrations, que toutes les fonctions f_n sont bornées sur I.

1. a) Rappeler la définition de la convergence normale de la série de fonctions $\sum f_n$ sur I.

   b) On suppose que la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur I, démontrer que $\sum f_n$ converge absolument sur I.

2. On suppose que la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur I, démontrer que $\sum f_n$ converge uniformément sur I.
   On pourra démontrer que la suite des restes converge uniformément sur I vers la fonction nulle ou utiliser toute autre méthode.

3. On pose pour $x \in [0;1]$, $f_n(x) = (-1)^n \left(\dfrac{x^2+n}{n^2}\right)$.

   Démontrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement puis converge uniformément sur $[0;1]$ mais ne converge absolument en aucune valeur de $[0;1]$.

4. Si la série de fonctions $\sum f_n$ converge absolument sur I, a-t-on nécessairement $\sum f_n$ qui converge uniformément sur I ?
   On attend une réponse détaillée et on pourra utiliser une série entière. .

Partie II

Dans toute cette partie, $(\alpha_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite décroissante de réels positifs, $I = [0;1[$ et pour tout $x \in I$, $f_n(x) = \alpha_n x^n(1-x)$.

5. Justifier que la suite $(\alpha_n)_{n\geqslant 1}$ est bornée et que la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge simplement sur I.

6. a) Calculer pour $n \geqslant 1$, $\|f_n\|_\infty = \sup\limits_{x\in I} |f_n(x)|$.

   b) Démontrer que la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge normalement sur I si et seulement si la série de réels positifs $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{\alpha_n}{n}$ converge.

7. a) Calculer pour tout $x \in I$, $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{\infty} x^k$.

   b) Si on suppose que la suite $(\alpha_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers 0, démontrer que la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge uniformément sur I.
   On pourra observer que pour $k \geqslant n+1, \alpha_k \leqslant \alpha_{n+1}$.

   c) Réciproquement, démontrer que si la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge uniformément sur I alors la suite $(\alpha_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers 0.

8. Dans chacun des cas suivants, donner, en détaillant, un exemple de suite décroissante de réels positifs $(\alpha_n)_{n\geqslant 1}$ telle que :

   a) La série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge normalement sur I.

   b) La série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$ ne converge pas uniformément sur I.

   c) La série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge uniformément sur I mais ne converge pas normalement sur I.

9. Résumer à l'aide d'un schéma toutes les implications possibles, pour une série de fonctions quelconque, entre les convergences : normale, uniforme, absolue et simple sur I.

Fin de l'énoncé