## Calculs de distances entre une matrice et certaines parties de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

**Notations**

Dans ce sujet, n est un entier naturel non nul et on note :
$\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ : la $\mathbb{R}$-algèbre des matrices carrées réelles d'ordre n.
$\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ : le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des matrices à n lignes et à une colonne.
Pour une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , ${}^tA$ est sa matrice transposée, $rang(A)$ son rang et $Tr(A)$ sa trace.
$I_n$ : la matrice unité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
$\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ : le sous-espace vectoriel des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
$\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ : le sous-espace vectoriel des matrices antisymétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .
$\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ : l'ensemble des matrices positives de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ c'est-à-dire des matrices A de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ vérifiant : pour toute matrice $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tXAX \geqslant 0$.
$GL_n(\mathbb{R})$ : le groupe des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .
$\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ : le groupe des matrices réelles orthogonales c'est-à-dire des matrices $M$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant : ${}^tMM = I_n$.
Pour p entier naturel, $\Delta_p$ est l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rang supérieur ou égal à p et $\nabla_p$ est l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rang inférieur ou égal à p.

**Objectifs**

Le but du sujet est de calculer la distance (par la norme de Schur définie à la question II.3.) d'une matrice à :
dans la partie II., $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ par le théorème de projection orthogonale,
dans la partie III., $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ par le théorème de décomposition polaire,
dans la partie IV., $\Delta_p$ par des notions de densité,
dans la partie V., $\nabla_p$ par le théorème de Courant et Fischer.
La partie I. traite un exemple qui sera utilisé dans les différentes parties.
Remarque : dans le texte, le mot "positif" signifie "supérieur ou égal à 0".

## I. Exercice préliminaire

**1.** Soit la matrice $\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on pose $H = {}^t\Gamma\Gamma$. Diagonaliser la matrice $H$ et déterminer une matrice $P$ de $\mathcal{O}_3(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale $D$ à termes tous positifs telles que $D^2 = P^{-1}HP$.

**2.** On pose $S = PDP^{-1} \in \mathcal{S}_3^+(\mathbb{R})$, montrer que la relation $\Gamma = US$ définit une matrice $U \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R})$ et calculer cette matrice.

## II. Calcul de la distance de A à $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et à $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$

**3.** Soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $(A|B) = Tr({}^tAB)$.
Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
La norme associée à ce produit scalaire (norme de Schur) est notée : $\|A\| = ((A|A))^{\frac{1}{2}}$. Dans tout le sujet, si $\Pi$ est une partie non vide de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, la distance d'une matrice $A$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à la partie $\Pi$ est le réel $d(A,\Pi) = \inf\limits_{M\in\Pi} \|A - M\|$.

**4.** Montrer que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ et que cette somme directe est orthogonale.

**5.** Si A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que $d(A, \mathcal{S}_n(\mathbb{R})) = \|\frac{1}{2}(A - {}^tA)\|$ et déterminer de même $d(A, \mathcal{A}_n(\mathbb{R}))$.

**6.** Calculer $d(\Gamma, \mathcal{A}_3(\mathbb{R}))$ où $\Gamma$ est la matrice exemple de la partie I.

# III. Calcul de la distance de A à $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$

## A. Théorème de la décomposition polaire

**7.** Montrer qu'une matrice $S$ de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ appartient à $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ si et seulement si toutes les valeurs propres de $S$ sont positives ou nulles.

**8.** Si $A$ est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que la matrice ${}^tAA \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

**9.** Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on suppose qu'il existe une matrice diagonale $D = \text{diag}(d_1, d_2, ..d_n)$ à termes positifs telle que ${}^tAA = D^2$.
On note $A_1, A_2, .., A_n$ les matrices de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ qui forment les colonnes de la matrice A.

a. Pour tout couple $(i, j)$ d'entiers naturels compris entre 1 et n, évaluer ${}^tA_iA_j$. En particulier, si i est un entier pour lequel $d_i = 0$, que vaut $A_i$ ?

b. Montrer que l'on peut trouver une base orthonormée $(E_1, E_2, ..., E_n)$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ (par rapport au produit scalaire canonique $\langle X, Y\rangle = {}^tXY$, de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$) telle que, pour tout entier naturel $i$ entre 1 et $n$, $A_i = d_iE_i$.

c. En déduire qu'il existe une matrice $E$ de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = ED$.

**10.** Soit $A$ et $B$ deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant ${}^tAA = {}^tBB$.

a. Montrer qu'il existe une matrice diagonale $D$ à termes positifs et une matrice orthogonale $P$ telles que : $P^{-1t}AAP = P^{-1t}BBP = D^2$.

b. Montrer qu'il existe une matrice $U$ de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = UB$.

**11.** Déduire des questions précédentes le théorème de décomposition polaire : Pour toute matrice $A$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, il existe une matrice $U$ de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et une matrice S de $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ telles que $A = US$. (Remarque : on peut également établir l'unicité de la matrice $S$ de $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ et même l'unicité de la matrice $U$ de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ si A est de plus inversible dans cette décomposition mais ce ne sera pas utile pour la suite du problème).

## B. Calcul de $d(A, \mathcal{O}_n(\mathbb{R}))$

**12.** Montrer que, pour toute matrice $M$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et pour toute matrice $\Omega$ de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, $\|M\Omega\| = \|\Omega M\| = \|M\|$.

**13.** Dans la suite de cette partie, soit $A$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, soit $U \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ telles que $A = US$ ; il existe une matrice diagonale $D$ et une matrice $P$ de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telles que $S = PDP^{-1}$.

a. Montrer que, pour toute matrice $\Omega$ de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, $\|A - \Omega\| = \|S - U^{-1}\Omega\|$ et en déduire que, $d(A, \mathcal{O}_n(\mathbb{R})) = d(S, \mathcal{O}_n(\mathbb{R}))$.

b. Montrer que, $d(A, \mathcal{O}_n(\mathbb{R})) = d(D, \mathcal{O}_n(\mathbb{R}))$

**14.** On note $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, .., \lambda_n)$

a. Montrer que pour toute matrice $\Omega$ de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, $\|D - \Omega\|^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i^2 - 2Tr(D\Omega) + n$

b. Montrer que pour toute matrice $\Omega$ de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, $Tr(D\Omega) \leqslant \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i$.

c. Conclure que $d(D, \mathcal{O}_n(\mathbb{R})) = \|D - I_n\|$.

**15.** Montrer que , $d(A, \mathcal{O}_n(\mathbb{R})) = \|A - U\|$ .

**16.** Calculer $d(\Gamma, \mathcal{O}_3(\mathbb{R}))$ où $\Gamma$ est la matrice exemple de la partie I.

## IV. Calcul de la distance de A à $\Delta_p$.

**17.** Un résultat de densité.

a. Soit $M$ un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrer qu'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que pour tout réel $\lambda$ vérifiant $0 < \lambda < \alpha$, la matrice $M - \lambda I_n$ estinversible.

b. En déduire que $GL_n(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

**18.** Soit $A$ un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, déterminer, pour tout entier naturel $p \leqslant n$, $d(A, \Delta_p)$.

## V. Calcul de la distance de A à $\nabla_p$.

## A. Théorème de Courant et Fischer

Soit A une matrice de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On notera $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant .. \geqslant \lambda_n$ ses valeurs propres, on notera $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, .., \lambda_n)$, $P$ la matrice de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $A = PD{}^tP$ et $C_1, C_2, .., C_n$ les matrices de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ formant les colonnes de la matrice P.
Si $k$ est un entier entre 1 et $n$, on note $\Psi_k$ l'ensemble des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de dimension $k$.
Nous allons montrer que :
$\lambda_k = \max\limits_{F \in \Psi_k} \min\limits_{X \in F - \{0\}} \dfrac{{}^tXAX}{{}^tXX}$. (théorème de Courant et Fischer).

**19.** Soit $X$ un vecteur de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de coordonnées $(x_1, x_2, .., x_n)$ dans la base orthonormée $(C_1, C_2, .., C_n)$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Calculer en fonction des $x_i$ et $\lambda_i$. ($i$ compris entre 1 et $n$) : ${}^tXAX$ et ${}^tXX$ et pour $k$ entier entre 1 et $n$, $\dfrac{{}^tC_kAC_k}{{}^tC_kC_k}$.

**20.** Soit $k$ entier entre 1 et $n$, on pose $F_k = \text{vect}\{C_1, C_2, .., C_k\}$. Montrer que pour tout $X$ non nul de $F_k$ , $\dfrac{{}^tXAX}{{}^tXX} \geqslant \lambda_k$ et déterminer $\min\limits_{X \in F_k - \{0\}} \dfrac{{}^tXAX}{{}^tXX}$.

**21.** Soit $F \in \Psi_k$

a. montrer que $dim(F \cap \text{vect}\{C_k, C_{k+1}, .., C_n\}) \geqslant 1$.

b. Si $X$ est un vecteur non nul de $F \cap \text{vect}\{C_k, C_{k+1}, .., C_n\}$, montrer que $\dfrac{{}^tXAX}{{}^tXX} \leqslant \lambda_k$ .

**22.** Conclure.

## B. Calcul de $d(A, \nabla_p)$

*Dans toute cette partie :* $A$ est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rang $r$ et $p$ est un entier naturel, $p < r$.

**23.** Montrer qu'il existe deux matrices $E$ et $P$ de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale $D$ à termes positifs telles que $A = EDP$. En déduire que le rang de la matrice ${}^tAA$ est encore $r$. (On pourra utiliser les résultats de la question **9.**)

**24.** Si on note les valeurs propres de la matrice symétrique réelle ${}^tAA$ de rang $r$ : $\mu_1 \geqslant \mu_2 \geqslant .. \geqslant \mu_r > 0$ et $\mu_{r+1} = .. = \mu_n = 0$, si on pose $D = \text{diag}(\sqrt{\mu_1}, \sqrt{\mu_2}, .., \sqrt{\mu_r}, 0..., 0)$, si pour $1 \leqslant l \leqslant n$ on note $M_l$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont la $l$-ième colonne est celle de la matrice $E \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ de la question **23.**, tous les autres termes de $M_l$ étant nuls, on a clairement : $ED = \sum\limits_{l=1}^{n} \sqrt{\mu_l} M_l$.
Montrer alors qu'il existe une famille orthonormale $(R_1, R_2, .., R_n)$ de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (pour le produit scalaire $(A|B) = Tr({}^tAB)$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ), toutes de rang un, et telles que $A = \sum\limits_{l=1}^{n} \sqrt{\mu_l} R_l = \sum\limits_{l=1}^{r} \sqrt{\mu_l} R_l$.

**25.** Avec les notations de la question **24.**, on pose $N = \sum\limits_{l=1}^{p} \sqrt{\mu_l} R_l$.
Montrer que $\text{rang}(N) \leqslant p$ puis que $d(A, \nabla_p) \leqslant \sqrt{\mu_{p+1} + .. + \mu_r}$.

**26.** Soit M une matrice de rang $p$ ($p < r$), on note $\alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \alpha_n \geqslant 0$ les valeurs propres de la matrice ${}^t(A - M)(A - M)$ et on pose $G = \text{Ker}M \cap \text{Im}({}^tAA)$.
Soit $k$ un entier compris entre 1 et $r - p$.

a. Montrer que $\dim G \geqslant r - p$ .

b. Soit $F$ un sous-espace vectoriel de $G$ de dimension k, montrer que : $\alpha_k \geqslant \min\limits_{X \in F - \{0\}} \dfrac{{}^tX{}^tAAX}{{}^tXX}$.

c. On note $(V_1, V_2, .., V_n)$ une base de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres de la matrice ${}^tAA$, le vecteur $V_i$ étant associé à la valeur propre $\mu_i$ de telle sorte que : $\mu_1 \geqslant \mu_2 \geqslant .. \geqslant \mu_r > 0$ et $\mu_{r+1} = .. = \mu_n = 0$.
Montrer que $\dim(G \cap \text{vect}\{V_1, V_2, .., V_{k+p}\}) \geqslant k$.

d. En déduire que $\alpha_k \geqslant \mu_{k+p}$.

**27.** En déduire $d(A, \nabla_p)$.

**28.** Calculer, pour $p \in \{0, 1, 2, 3\}$, $\gamma_p = d(\Gamma, \nabla_p)$ où $\Gamma$ est la matrice exemple de la partie I.