Devoir libre

Pour le Vendredi 13 mars 2020

Problème 1 : obligatoire et très important

Dans ce problème, toutes les fonctions sont définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles.

Partie I : Partie préliminaire

Dans cette partie, les questions sont indépendantes les unes des autres et leurs résultats peuvent être admis dans la suite du problème.

1. Justifier, pour tout réel $x \in]-1, 1[$, l'existence de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1}$ et donner sa valeur.

2. On rappelle que la fonction Γ est définie pour tout réel $x \in]0, +\infty[$ par : $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$.
Démontrer que pour tout réel $x \in]0, +\infty[, \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ et en déduire, pour tout entier naturel n non nul la valeur de $\Gamma(n)$.

3. Démontrer la formule de Taylor avec reste intégral : si I est un intervalle contenant le réel a, si f est une fonction de I dans $\mathbb{R}$ de classe C^∞ sur I, alors pour tout réel $x \in I$ et tout entier naturel n, on a :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt.$$

Partie II : théorème d'unicité du développement en série entière

On rappelle le théorème suivant : Si une fonction f admet un développement en série entière sur $]-a, a[$, alors :

- la fonction f est de classe C^∞ sur $]-a, a[$,
- son développement en série entière est unique et est donné par la série de Taylor de la fonction f à l'origine : $\forall x \in]-a, a[, f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$.

4. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(0) = 1$ et pour tout réel $x \neq 0, f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$.
Démontrer que la fonction f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

5. Expliciter une fonction f de classe C^∞ sur un voisinage de 0 et vérifiant pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ l'égalité $f^{(n)}(0) = n \cdot n!$.

6. Un théorème des moments

Soit f une fonction développable en série entière sur $]-R, R[$ avec $R > 1$:

$\forall x \in]-R, R[, f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$.

On suppose que pour tout entier naturel n, $\displaystyle\int_0^1 x^n f(x)dx = 0$.

L'objectif de cette question est de montrer que f est identiquement nulle sur $]-R, R[$.

a. Démontrer que la série $\sum_{n \geqslant 0} f(x) \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ converge normalement sur l'intervalle $[0, 1]$.

b. À l'aide du calcul de $\int_0^1 (f(x))^2 dx$, démontrer que la fonction f est nulle sur l'intervalle $[0, 1]$.

c. Démontrer que f est la fonction nulle sur l'intervalle $]-R, R[$.

Contre-exemples

7. Donner un exemple de fonction f à la fois de classe C^∞ sur $]-\infty, 1[$ et développable en série entière au voisinage de l'origine, mais qui ne coïncide pas avec sa série de Taylor en 0 sur $]-\infty, 1[$ tout entier.

8. Un exemple de fonction ne coïncidant avec sa série de Taylor en 0 sur aucun voisinage de 0.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
pour tout réel $x \neq 0, f(x) = \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)$ et $f(0) = 0$.

a. Rappeler l'allure de la courbe de la fonction f au voisinage de 0.

b. Par des théorèmes généraux, la fonction f est de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$. Démontrer que pour tout entier naturel n, il existe un polynôme P_n tel que :
pour tout $x \in]0, +\infty[, f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{3n}} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)$.

c. Démontrer que la fonction f est de classe C^∞ sur $[0, +\infty[$ avec pour tout entier naturel n, $f^{(n)}(0) = 0$.
Par parité, la fonction f ainsi définie est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

d. La fonction f est elle développable en série entière sur un intervalle $]-r, r[$ pour un $r > 0$?

9. Un exemple où la série de Taylor de la fonction f en 0 a un rayon nul.

Pour tout x réel, on pose $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1 + tx^2}$.

a. Justifier que pour tout réel x la fonction $t \mapsto \frac{e^{-t}}{1 + tx^2}$ est bien intégrable sur $[0, +\infty[$, puis démontrer que la fonction est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
On admettra que la fonction f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et que l'on obtient les dérivées successives en dérivant sous le signe intégrale.

b. Pour $t \in]0, +\infty[$, calculer au moyen de la série entière de $x \mapsto \frac{1}{1 + tx^2}$, dont on précisera le rayon de convergence, les dérivées successives en 0 de la fonction $x \mapsto \frac{e^{-t}}{1 + tx^2}$ pour en déduire l'expression de $f^{(n)}(0)$ pour tout entier naturel n.

c. Quel est le rayon de la série entière $\sum_{n \geqslant 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$?

Condition suffisante

On se propose dans cette partie d'étudier une condition suffisante pour qu'une fonction de classe C^∞ sur un intervalle centré en 0 soit développable en série entière au voisinage de 0.

10. Soient a un réel strictement positif et f une fonction de classe C^∞ sur l'intervalle $]-a, a[$. On suppose qu'il existe un réel $M > 0$ tel que pour tout réel $x \in]-a, a[$ et pour tout entier naturel n, $|f^{(n)}(x)| \leqslant M$.

a. Démontrer que la fonction f est développable en série entière au voisinage de l'origine.

b. Donner un exemple simple de fonction non polynomiale pour laquelle ce résultat s'applique.

Problème 2

Rappels et notations

Pour tout entier naturel non nul n, on note :

— $[\![1,n]\!]$ l'ensemble des entiers naturels k tels que $1 \leqslant k \leqslant n$;

— $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (respectivement $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$) l'espace vectoriel des matrices carrées à n lignes et n colonnes (respectivement l'espace vectoriel des matrices colonnes à n lignes) à coefficients dans $\mathbb{R}$;

— $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ constitué des matrices symétriques.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$; on dit que A est positive (respectivement définie positive) si :

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ {}^tXAX \geqslant 0 \quad (\text{respectivement } {}^tXAX > 0 \text{ si } X \neq 0).$$

L'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels est noté $\mathbb{R}[X]$, et, pour tout entier naturel p, le sous-espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à p est noté $\mathbb{R}_p[X]$.

Objectifs

La première partie a pour but de démontrer une caractérisation des matrices symétriques réelles définies positives, à l'aide des déterminants de certaines matrices extraites.
La deuxième partie aborde l'étude d'une suite de polynômes orthogonaux pour un produit scalaire défini à l'aide d'une intégrale.
La troisième partie introduit les matrices de Hilbert et leur inverse, dont certaines propriétés sont étudiées dans la partie IV.

I — Caractérisation des matrices symétriques définies positives

1. **a.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

i. Montrer que A est positive si et seulement si toutes ses valeurs propres sont positives.

ii. Montrer que A est définie positive si et seulement si toutes ses valeurs propres sont strictement positives.

b. Pour $n \in \mathbb{N}^*, A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $i \in [\![1,n]\!]$, on note $A^{(i)}$ la matrice carrée d'ordre i extraite de A, constituée par les i premières lignes et les i premières colonnes de A.
Le but de cette question est de démontrer l'équivalence suivante :

$$A \text{ est définie positive} \iff \forall i \in [\![1,n]\!], \det(A^{(i)}) > 0.$$

i. Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On suppose que A est définie positive.
Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, montrer que la matrice $A^{(i)}$ est définie positive et en déduire que $\det(A^{(i)}) > 0$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on dira qu'une matrice A de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ vérifie la propriété $\mathcal{P}_n$ si $\det(A^{(i)}) > 0$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$.

ii. Dans les cas particuliers $n = 1$ et $n = 2$, montrer directement que toute matrice $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ vérifiant la propriété $\mathcal{P}_n$ est définie positive.

iii. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que toute matrice de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ vérifiant la propriété $\mathcal{P}_n$ est définie positive. On considère une matrice A de $\mathcal{S}_{n+1}(\mathbb{R})$ vérifiant la propriété $\mathcal{P}_{n+1}$ et on suppose par l'absurde que A n'est pas définie positive.

A. Montrer alors que A admet deux vecteurs propres linéairement indépendants associés à des valeurs propres (non nécessairement distinctes) strictement négatives.

B. En déduire qu'il existe $X \in \mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$ dont la dernière composante est nulle et tel que ${}^tXAX < 0$.

C. Conclure.

c. Soit A une matrice de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. A-t-on l'équivalence suivante :

$$A \text{ est positive } \iff \forall i \in [\![1, n]\!], \det(A^{(i)}) \geqslant 0 \text{ ?}$$

d. Écrire une fonction en langage Python qui prend en entrée une matrice $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et qui, en utilisant la caractérisation du 1.b, renvoie « True » si la matrice M est définie positive et « False » dans le cas contraire.

On pourra utiliser la commande `np.linalg.det(a)` qui renvoie le déterminant de `a`.

II — Étude d'une suite de polynômes

2. On définit la suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\begin{cases} P_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, P_n = [X(X-1)]^n \end{cases}$$

De plus, on pose :

$$\forall (P, Q) \in (\mathbb{R}[X])^2, \quad \langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)dt.$$

a. Montrer que l'application $(P, Q) \longmapsto \langle P, Q \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

b. On note $P_n^{(n)}$ le polynôme dérivé n fois de P_n.
Déterminer le degré de $P_n^{(n)}$ et calculer $P_n^{(n)}(1)$.
On définit la suite de polynômes $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\begin{cases} L_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, L_n = \frac{1}{P_n^{(n)}(1)} P_n^{(n)} \end{cases}$$

c. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que, pour tout $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, $\langle Q, L_n \rangle = 0$.
Indication : on pourra intégrer par parties.

d.

i. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $I_n = \displaystyle\int_0^1 P_n(u)du$. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la valeur de I_n.

ii. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la relation : $\langle L_n, L_n \rangle = \dfrac{1}{2n+1}$.

e. Déterminer une famille de polynômes $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant les deux conditions suivantes :

i. pour tout $n \in \mathbb{N}$, le degré de K_n vaut n et son coefficient dominant est strictement positif ;

ii. pour tout $N \in \mathbb{N}$, $(K_n)_{0\leqslant n\leqslant N}$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}_N[X]$ pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.
Justifier l'unicité d'une telle famille.

f. Calculer K_0, K_1 et K_2.

III — Matrices de HILBERT

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la matrice H_n par :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, (H_n)_{i,j} = \frac{1}{i+j-1}$$

où $(H_n)_{i,j}$ désigne le coefficient de place (i,j) de la matrice H_n. On note de plus $\Delta_n = \det(H_n)$.

3. **a.** ***Étude de quelques propriétés de H_n***

i. Calculer H_2 et H_3. Montrer que ce sont des matrices inversibles et déterminer leur inverse. Dans les questions suivantes de III.A, on désigne par n un entier naturel non nul.

ii. Montrer la relation :

$$\Delta_{n+1} = \frac{(n!)^4}{(2n)!(2n+1)!}\Delta_n.$$

Indication : on pourra commencer par soustraire la dernière colonne de Δ_{n+1} à toutes les autres.

iii. En déduire l'expression de Δ_n en fonction de n (on fera intervenir les quantités $c_m = \prod_{i=1}^{m-1} i!$ pour des entiers m adéquats).

iv. Prouver que H_n est inversible, puis que $\det(H_n^{-1})$ est un entier.

v. Démontrer que H_n admet n valeurs propres réelles (comptées avec leur ordre de multiplicité) strictement positives.

b. ***Approximation au sens des moindres carrés***

On note $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. On convient d'identifier l'espace $\mathbb{R}[X]$ au sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ constitué des fonctions polynomiales de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$; ainsi, pour tout entier naturel i, le polynôme X^i est confondu avec la fonction polynomiale définie par : $X^i(t) = t^i$ pour tout $t \in [0,1]$.

On étend à $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ le produit scalaire $\langle .,. \rangle$ de la partie II en posant :

$$\forall (f,g) \in (\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R}))^2, \langle f,g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt.$$

(On ne demande pas de vérifier qu'il s'agit d'un produit scalaire sur $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$.)

On note $\|\cdot\|$ la norme associée à ce produit scalaire : pour tout fonction $f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$, on a donc :

$$\|f\| = \sqrt{\langle f,f \rangle}$$

i. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $\Pi_n \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que :

$$\|\Pi_n - f\| = \min_{Q \in \mathbb{R}_n[X]} \|Q - f\|.$$

ii. Montrer que la suite $(\|\Pi_n - f\|)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et converge vers 0.

iii. Montrer que H_n est la matrice du produit scalaire $\langle .,. \rangle$ restreint à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, dans la base canonique de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

iv. Calculer les coefficients de Π_n à l'aide de la matrice H_{n+1}^{-1} et des réels $\langle f, X^i \rangle$.

v. Déterminer explicitement Π_2 lorsque f est la fonction définie pour tout $t \in [0,1]$ par : $f(t) = \dfrac{1}{t^2+1}$.

IV — Propriétés des coefficients de H_n^{-1}

4. **a.** ***Somme des coefficients de*** H_n^{-1}

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, on note $h_{i,j}^{(-1,n)}$ le coefficient de place (i,j) de la matrice H_n^{-1} et on désigne par s_n la somme des coefficients de la matrice H_n^{-1}, c'est-à-dire :

$$s_n = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} h_{i,j}^{(-1,n)}$$

i. Calculer s_1, s_2 et s_3. Conjecturer de manière générale la valeur de s_n en fonction de n.

ii. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

A. Montrer qu'il existe un unique n-uplet de nombres réels $(a_p^{(n)})_{0 \leqslant p \leqslant n-1}$ vérifiant le système de n équations linéaires à n inconnues suivant :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_0^{(n)} & + & \frac{a_1^{(n)}}{2} & + & \cdots & + & \frac{a_{n-1}^{(n)}}{n} & = & 1 \\ \frac{a_0^{(n)}}{2} & + & \frac{a_1^{(n)}}{3} & + & \cdots & + & \frac{a_{n-1}^{(n)}}{n+1} & = & 1 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ \frac{a_0^{(n)}}{n} & + & \frac{a_1^{(n)}}{n+1} & + & \cdots & + & \frac{a_{n-1}^{(n)}}{2n-1} & = & 1 \end{array}\right.$$

B. Montrer que $s_n = \displaystyle\sum_{p=0}^{n-1} a_p^{(n)}$.

On définit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le polynôme S_n par $S_n = a_0^{(n)} + a_1^{(n)} X + \ldots + a_{n-1}^{(n)} X^{n-1}$.

Dans les question suivantes de IV.A, on désigne par n un entier naturel non nul.

iii. Montrer que :

$$\forall Q = \alpha_0 + \alpha_1 X + \ldots + \alpha_{n-1} X^{n-1} \in \mathbb{R}_{n-1}[X], \langle S_n, Q \rangle = \sum_{p=0}^{n-1} \alpha_p$$

iv. Exprimer s_n à l'aide de la suite de polynômes $(K_p)_{p \in \mathbb{N}}$ définie à la question II.E.

v. Pour tout $p \in [\![0, n-1]\!]$, calculer $K_p(1)$.

vi. Déterminer la valeur de s_n.

b. ***Les coefficients de*** H_n^{-1} ***sont des entiers***

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\displaystyle\binom{n}{k}$ le coefficient binomial $\displaystyle\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

i. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\displaystyle\binom{2p}{p}$ est un entier pair.

En déduire que, si $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [\![1,n]\!]$, alors $\displaystyle\binom{n+p}{p}\binom{n}{p}$ est un entier pair.

ii. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que l'on peut écrire : $K_n = \sqrt{2n+1}\Lambda_n$ où Λ_n est un polynôme à coefficients entiers que l'on explicitera. Parmi les coefficients de Λ_n, lesquels sont pairs ?

iii. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

A. Calculer $h_{i,i}^{(-1,n)}$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$; on donnera en particulier une expression très simple de $h_{1,1}^{(-1,n)}$ et $h_{n,n}^{(-1,n)}$ en fonction de n.

B. Calculer $h_{i,j}^{(-1,n)}$ pour tout couple $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$; en déduire que les coefficients de H_n^{-1} sont des entiers.

C. Montrer que $h_{i,j}^{(-1,n)}$ est divisible par 4 pour tout couple $(i,j) \in [\![2,n]\!]^2$.