DL 7

Corrigé

# I. Etude d'une suite récurrente

**I.A**

**1.** $f'$ étant positive, $f$ croit sur $[0,1]$. Montrons alors par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \le u_n \le u_{n+1} \le 1$$

- Initialisation : c'est vrai au rang 0 car $u_0 = 0$ et $u_1 = f(0) \in [0,1]$.
- Hérédité : soit $n \ge 0$ tel que le résultat est vrai jusqu'au rang $n$. On a alors $0 \le u_n \le u_{n+1} \le 1$ et par croissance de $f$ sur $[0,1]$,

$$f(0) = 0 \le u_{n+1} = f(u_n) \le f(u_{n+1}) = u_{n+2} \le f(1) = 1$$

On a ainsi prouvé le résultat au rang $n+1$.

On a montré que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et qu'elle reste dans $[0,1]$. Par théorème de limite monotone, la suite converge et de plus (passage à la limite dans une inégalité large)

$$\ell = \lim_{n\to+\infty} u_n \in [0,1]$$

**2.** Comme $f(1) = 1$, l'ensemble $A = \{x \in [0,1] / \ f(x) = x\}$ est non vide. Comme il est minoré, il admet une borne inférieure $x_f$. Mais $A = (f - Id)(\{0\})$ est fermé (image réciproque par une application continue d'un fermé) et donc $x_f \in A$ ce qui montre que $x_f$ est un minimum. Il y a donc bien une plus petite solution à l'équation $f(x) = x$.

**3.** Comme $f$ croît sur $[0,1]$, on a $f([0,x_f]) = [f(0), f(x_f)] = [0,x_f]$. $u_0 \in [0,x_f]$ et $[0,x_f]$ est stable par $f$, donc (récurrence simple sur le modèle de la précédente)

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in [0,x_f]$$

Par passage à la limite, $\ell \in [0,x_f]$. $f$ étant continue sur $[0,1]$, un passage à la limite dans $u_{n+1} = f(u_n)$ donne de plus $f(\ell) = \ell$. Enfin, par minimalité, $x_f$ est le seul point fixe de $f$ dans $[0,x_f]$. On a donc

$$x_f = \ell$$

**I.B** Posons $g(x) = f(x) - x$. $g$ est de classe $C^1$ sur $[0,1]$ et $g'(x) = f'(x) - 1$. Si $m > 1$ alors $g'(1) > 0$ et $g$ est localement strictement croissante au voisinage de 1. Comme $g(1) = f(1) - 1 = 0$, il existe donc $a \in [0,1[$ tel que $g(a) < 0$. Enfin, $g(0) = f(0) \ge 0$ et par théorème des valeurs intermédiaires, $g$ s'annule sur $[0,a] \subset [0,1[$. On en déduit que $x_f \in [0,a]$ et donc que

$$x_f \in [0,1[$$

**I.C** Notons toujours $g(x) = f(x) - x$. On a $g \in C^2([0,1])$ et $g'(x) = f'(x) - 1$, $g''(x) = f''(x) \ge 0$ ; comme $g''(1) = f''(1) > 0$, $g''$ (qui est continue) est même strictement positive sur un intervalle $[a,1[$. $g'$ est donc croissante sur $[0,1]$ et strictement croissante sur $[a,1]$. Comme $g'(1) = m - 1 \le 0$, $g'$ est négative sur $[0,1]$ et même strictement négative sur $[a,1[$. $g$ est donc décroissante sur $[0,1]$ et même strictement décroissante sur $[a,1]$. En particulier, $\forall x \in [a,1[,\ g(x) > 0$ et $\forall x \in [0,a],\ g(x) \geq g(a) > 0$. $g$ ne s'annule donc pas sur $[0,1[$ et ceci impose

$$x_f = 1$$

Sur $[a,1[,\ f''$ est strictement positive et $f'$ est donc strictement croissante sur $[a,1]$. Ainsi, $\forall x \in [a,1],\ f'(x) \leq m$. Si, par l'absurde, $m$ était nul alors $f'$ serait nulle sur $[a,1]$. Comme $f'$ est positive et croissante sur $[0,1]$ ($f'' \geq 0$) on aurait donc $f'$ nulle sur $[0,1]$ ce qui contredit $f''(1) > 0$. On a donc $f'(1) > 0$ et $f$ est strictement croissante au voisinage de 1. Comme elle est croissante sur $[0,1]$, elle ne prend finalement la valeur 1 qu'en 1. Si, par l'absurde, on avait $u_n = 1$, on aurait $f(u_{n-1}) = 1$ et donc $u_{n-1} = 1$. Par une récurrence descendante, on obtiendrait $u_0 = 1$, ce qui est faux. Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in [0,1[$$

**I.D**

**1.** On a $u_n = 1 - \varepsilon_n$ et $\varepsilon_n \to 0$. Par formule de Taylor-Young,

$$u_{n+1} = f(u_n) = f(1-\varepsilon_n) = f(1) - \varepsilon_n f'(1) + \frac{\varepsilon_n^2}{2} f''(1) + o(\varepsilon_n^2) = 1 - \varepsilon_n + \frac{\varepsilon_n^2}{2} f''(1) + o(\varepsilon_n^2)$$

On en déduit que

$$\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n - \frac{\varepsilon_n^2}{2} f''(1) + o(\varepsilon_n^2) = \varepsilon_n \left(1 - \frac{\varepsilon_n}{2} f''(1) + o(\varepsilon_n)\right)$$

On passe à l'inverse (possible puisque la suite $(\varepsilon_n)$ ne s'annule pas) et en utilisant $\frac{1}{1-u} = 1 + u + o_0(u)$ on trouve

$$\frac{1}{\varepsilon_{n+1}} = \frac{1}{\varepsilon_n} \left(1 + \frac{\varepsilon_n}{2} f''(1) + o(\varepsilon_n)\right)$$

Il en résulte que

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{\varepsilon_{n+1}} - \frac{1}{\varepsilon_n}\right) = \frac{f''(1)}{2}$$

**2.** D'après le théorème de Césaro,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{\varepsilon_{k+1}} - \frac{1}{\varepsilon_k}\right) = \frac{f''(1)}{2}$$

Dans la somme, les termes se télescopent et ce qui précède s'écrit

$$\frac{1}{n}\left(\frac{1}{\varepsilon_n} - \frac{1}{\varepsilon_0}\right) = \frac{f''(1)}{2} + o(1)$$

$\frac{1}{n\varepsilon_0}$ étant de limite nulle est $o(1)$ et ce qui précède s'écrit aussi

$$\frac{1}{n\varepsilon_n} = \frac{f''(1)}{2} + o(1)$$

ou encore (puisque $f''(1) \neq 0$) $n\varepsilon_n \sim \frac{f''(1)}{2}$. On peut passer à l'inverse dans les équivalent et multiplier les équivalents. On a ainsi

$$1 - u_n = \varepsilon \sim \frac{2}{nf''(1)}$$

**I.E**

**1.** Le même calcul que ci-dessus donne

$$\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n \left(m - \frac{\varepsilon_n}{2} f''(1) + o(\varepsilon_n)\right)$$

On en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|\varepsilon_{n+1}|}{|\varepsilon_n|} = |m| = m \in [0,1[$$

Par règle de D'Alembert, $\sum(\varepsilon_n)$ est donc absolument convergente.

Notons que le cas $m = 0$ est impossible d'après le raisonnement de la question **I.C**. On peut donc diviser par $m > 0$. En reprenant l'identité ci-dessus, on a

$$\frac{\varepsilon_{n+1}}{m\varepsilon_n} = 1 - \frac{\varepsilon_n}{2m} f''(1) + o(\varepsilon_n)$$

On en déduit que

$$\ln\left(\frac{\varepsilon_{n+1}}{m\varepsilon_n}\right) = O\left(\varepsilon_n\right)$$

qui est le terme général d'une absolument convergente. On a montré que

$$\ln\left(\frac{\varepsilon_{n+1}}{m\varepsilon_n}\right) = \ln\left(\frac{m^{-(n+1)}\varepsilon_{n+1}}{m^{-n}\varepsilon_n}\right)$$

est le terme général d'une série absolument convergente.

**2.** Notons $L$ la somme de la série de la question précédente. On a donc

$$\sum_{k=0}^{n-1} \ln\left(\frac{\varepsilon_{k+1}}{m\varepsilon_k}\right) = L + o(1)$$

Avec les propriétés de morphisme du logarithme, les termes se télescopent et on obtient

$$\ln(\varepsilon_n) - \ln(\varepsilon_0) - n\ln(m) = L + o(1)$$

ou encore

$$\varepsilon_n = m^n e^L \varepsilon_0 e^{o(1)}$$

Comme $e^L\varepsilon_0 > 0$ (ce qui importe est la non nullité) on a finalement

$$1 - u_n = \varepsilon_n \sim cm^n \quad \text{avec} \quad c = e^L\varepsilon_0 > 0$$

# II. Formule de Wald

## II.A

**1.** Les variables $X$ et $Y$ étant indépendantes, pour toute fonction $f$ les variables $f(X)$ et $f(X)$ le sont et on a donc, sous réserve que les espérances existent $\mathbb{E}(f(X)f(Y)) = \mathbb{E}(f(X))\mathbb{E}(f(Y))$. Avec la fonction $x \in \mathbb{N} \mapsto t^x$ (pour un réel quelconque $t$ fixé dans $[-1, 1]$), on obtient (le cours nous indique que les espérances existent toutes)

$$G_{X+Y}(t) = \mathbb{E}(t^X t^Y) = \mathbb{E}(t^X)\mathbb{E}(t^Y) = G_X(t)G_Y(t)$$

**2.** Montrons par récurrence que la propriété

$$G_{S_k} = (G_X)^k$$

est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

- Initialisation : l'hypothèse est immédiatement vraie au rang 1.
- Hérédité : soit $k \geq 1$ tel que l'hypothèse soit vraie aux rangs $1, \ldots, k$. D'après la question précédente (et le résultat d'indépendance admis) la fonction génératrice de $X_1 + \cdots + X_k + X_{k+1} = S_k + X_{k+1}$ est $G_{S_k}G_X$. En utilisant l'hypothèse de récurrence, elle vaut $(G_X)^{k+1}$.

La propriété est aussi vraie au rang 0 puisque $G_{S_0} = 1$ ($S_0$ étant constante égale à 0) et que $(G_X)^0 = 1$.

**3.** $(T = k)_{k\in\mathbb{N}}$ étant un système complet d'événements, on a

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(S = n) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}((S = n) \cap (T = k))$$

On en déduit que

$$\forall t \in [-1,1],\ G_S(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(S=n)t^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}((S=n)\cap(T=k))t^n\right)$$

Comme on a l'égalité des événements $(S=n)\cap(T=k)$ et $(S_k=n)\cap(T=k)$ et comme $S_k$ et $T$ sont admis indépendants, on a alors

$$\forall t \in [-1,1],\ G_S(t) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(S_k=n)\mathbb{P}(T=k)t^n\right)$$

On fixe $K \in \mathbb{N}$. On peut découper la somme intérieure en deux :

$$\forall t \in [-1,1],\ G_S(t) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{K} \mathbb{P}(S_k=n)\mathbb{P}(T=k)t^n + \sum_{k=K+1}^{\infty} \mathbb{P}(S_k=n)\mathbb{P}(T=k)t^n\right)$$

Pour écrire $\sum_{n=0}^{\infty}(U_n+V_n) = \sum_{n=0}^{\infty} U_n + \sum_{n=0}^{\infty} V_n$, il nous suffit (sachant que le membre de gauche existe) de montrer que l'un des deux termes du membre de droite existe (l'autre existera alors fatalement). On écrit (ici on a des sommes finies et donc pas de problème)

$$\sum_{n=0}^{N}\sum_{k=0}^{K} \mathbb{P}(S_k=n)\mathbb{P}(T=k)t^n = \sum_{k=0}^{K}\left(\sum_{n=0}^{N} \mathbb{P}(S_k=n)t^n\right)\mathbb{P}(T=k)$$

$\sum_{n=0}^{N} \mathbb{P}(S_k=n)t^n$ est le terme général d'une suite convergente de limite $G_S(t) = G_X(t)^k$. On a donc convergence ci-dessus (somme d'un nombre constant de suite convergente) et

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{K} \mathbb{P}(S_k=n)\mathbb{P}(T=k)t^n = \sum_{k=0}^{K} G_X(t)^k\mathbb{P}(T=k)$$

Avec tous ces arguments, on peut finalement écrire

$$\forall t \in [-1,1],\ G_S(t) = \sum_{k=0}^{K} G_X(t)^k\mathbb{P}(T=k) + \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=K+1}^{\infty} \mathbb{P}(S_k=n)\mathbb{P}(T=k)t^n\right)$$

*Remarque : la formule est valable pour $t \in [-1,1]$ et pas seulement $t \in [0,1]$.*

**4.** On prend $t \in [0,1]$ et $K \in \mathbb{N}$. On a

$$\forall k \geq K+1,\ \forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq \mathbb{P}(S_k=n)\mathbb{P}(T=k)t^n \leq \mathbb{P}(T=k)t^n$$

Comme $\sum(\mathbb{P}(T=k))$ converge (série positive de somme 1) on peut sommer pour $k \geq K$ et obtenir

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq \sum_{k=K+1}^{\infty} \mathbb{P}(S_k=n)\mathbb{P}(T=k)t^n \leq \left(\sum_{k=K+1}^{\infty} \mathbb{P}(T=k)\right)t^n$$

Comme $t \in [0,1[$, $\sum t^n$ converge et sa somme vaut $\frac{1}{1-t}$. On en déduit que

$$0 \leq R_K \leq \frac{1}{1-t}\sum_{k=K+1}^{\infty} \mathbb{P}(T=k)$$

**5.** A $t \in [0,1[$ fixé, la question précédente montre que $R_K \to 0$ quand $K \to +\infty$. On peut ainsi faire tendre $K$ vers $+\infty$ dans **II.A.3** pour obtenir

$$G_S(t) = \sum_{k=0}^{\infty} G_X(t)^k\mathbb{P}(T=k) = G_T(G_X(t)) = G_T \circ G_X(t)$$

Ceci n'est prouvé que pour $t \in [0,1]$ mais cela suffit pour conclure que

$$G_S = G_T \circ G_X$$

**II.B** Si $Y$ est une variable d'espérance finie, on a $\mathbb{E}(Y) = G'_Y(1)$. Ici, en supposant que les espérances existent, on a (puisque $G_X(1) = 1$)

$$\mathbb{E}(S) = G'_S(1) = G'_T(G_X(1)).G'_X(1) = \mathbb{E}(T)\mathbb{E}(X_1)$$

**II.C**

**1.** Si $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ alors pour tout $n$, $\mathbb{P}[Y = n] = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}$ et

$$\forall t \in [-1, 1],\ G_Y(t) = e^{-\lambda} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda t}$$

**2.** Ici, $T \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ et $\forall i,\ X_i \hookrightarrow \mathcal{B}(\alpha)$. $S$ est alors le nombre d'insectes issus de la ponte. On a

$$\forall t \in [-1, 1],\ G_S(t) = G_T(G_X(t)) = G_T(1 - \alpha + \alpha t) = e^{-\lambda\alpha} e^{\lambda\alpha t}$$

et on conclut que

$$S \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda\alpha)$$

# III. Processus de Galton-Watson

**III.A**

**1.** On fixe $n \in \mathbb{N}$. On est exactement dans la situation de la partie précédente. Ici, $T = Y_n$ et les $X_i$ sont les $X_{n,i}$. $Y_{n+1}$ correspond alors à $S$ et **II.A** donne (toutes les hypothèses d'indépendance étant vérifiées)

$$\varphi_{n+1} = G_{Y_{n+1}} = G_{Y_n} \circ G_{X_{n,1}} = \varphi_n \circ f$$

**2.** De même, **II.B** donne

$$\mathbb{E}(Y_{n+1}) = \mathbb{E}(Y_n)\mathbb{E}(f)$$

et (on a une suite géométrique)

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{E}(Y_n) = \mathbb{E}(f)^n \mathbb{E}(Y_0) = m^n$$

**3.** L'événement $E$ : "il y a extinction" est égal à les réunion des événements $(Y_n = 0)$ (il y a extinction si la population fini par être nulle) :

$$E = \bigcup_{n=0}^{\infty} (Y_n = 0)$$

Les événements $(Y_n = 0)$ étant emboîtés, on peut utiliser le théorème de limite monotone pour en déduire que

$$\mathbb{P}(E) = \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(Y_n = 0) = \lim_{n \to +\infty} \varphi_n(0)$$

Avec **III.A.1** et $\varphi_0 = \mathrm{Id}$, une récurrence immédiate montre que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \varphi_n = f^{(n)}$$

où $f^{(n)}$ désigne l'itérée $n$ fois de $f$ pour la composition (avec la convention $f^{(0)} = \mathrm{Id}$). En particulier

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \varphi_{n+1}(0) = f(f^{(n)}(0)) = f(\varphi_n(0))$$

et $(\varphi_n(0))_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie la relation de récurrence de la partie **I**. Il nous reste à montrer que la fonction $f$ vérifie les hypothèses de cette partie.

- $f$ est de classe $C^2$ sur $[0, 1]$ puisque l'on a suppos que la loi $\mu$ possède une espérance et une variance. De plus, $f'$ et $f''$ sont à valeurs positives puisque

$$\forall t \in [0, 1],\ f'(t) = \sum_{k \geq 0} (k+1) p_{k+1} t^k \quad \text{et} \quad f''(t) = \sum_{k \geq 0} (k+1)(k+2) p_{k+2} t^k$$

- $f$ est définie de $[0,1]$ dans $[0,1]$ ($\forall t \in [0,1],\ 0 \leq f(t) = \sum_{k\geq 0} p_k t^k \leq \sum_{k\geq 0} p_k = 1$).
- $f(1) = \sum_{k\geq 0} p_k = 1$.
- $f'(0) = p_1 \leq p_0 + p_1 < 1$.
- $f''(1) = \sum_{k\geq 0}(k+1)(k+2)p_{k+2} > 0$ car l'un des $p_{k+2}$ est $> 0$.

**4.** Si $m \leq 1$ alors $\varphi_n(0) \to 1$ d'après **I.C**. La population s'éteint donc presque sûrement.

**III.B**

**1.** Soit $k \in \mathbb{N}^*$ $T(\omega) = k$ alors $Y_{k-1}(\omega) \neq 0$ et $Y_k(\omega) = 0$. En particulier $(T = k) \subset (Y_{k-1} \neq 0)$ et donc

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leq \mathbb{P}(T = k) \leq \mathbb{P}(Y_{k-1} \neq 0) = 1 - \mathbb{P}(Y_{k-1} = 0) = 1 - \varphi_{k-1}(0)$$

D'après la question **I.E** (on est bien dans le cas $m < 1$), $k(1-\varphi_{k-1}(0)) \sim ckm^{k-1}$ est le terme général d'une série convergente (par comparaison aux séries de Riemann puisque ce terme est $o(1/k^2)$puisque $m \in [0,1[$). A fortiori, $k\mathbb{P}(T = k)$ est aussi le terme général d'une série convergente (comparaison de séries positives) et $\mathbb{E}(T)$ existe (ici, absolue convergence et convergence sont équivalentes).

**2.** Pour tout entier $n$,

$$\mathbb{P}(Y_n \geq 1) = \sum_{k\geq 1} \mathbb{P}(Y_n = k) \leq \sum_{k\geq 1} k\mathbb{P}(Y_n = k) = \mathbb{E}(Y_n) = m^n$$

On est dans le cas où la population s'éteint presque sûrement et on a donc $\mathbb{P}(T = -1) = 0$. On a montré dans le cours en utilisant Fubini et $k = \sum_{i=1}^k 1$ que

$$\mathbb{E}(T) = \sum_{k\geq 0} k\mathbb{P}(T = k) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(T > k)$$

On propose une autre preuve ici :

$$\mathbb{E}(T) = \sum_{k\geq 0} k(\mathbb{P}(T > k-1) - \mathbb{P}(T > k))$$

Pour manipuler les sommes, revenons à des sommes partielles. On a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} k(\mathbb{P}(T > k-1) - \mathbb{P}(T > k)) &= \sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}(T > k-1) - \sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}(T > k) \\
&= \sum_{k=-1}^{n} (k+1)\mathbb{P}(T > k) - \sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}(T > k) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(T > k) - n\mathbb{P}(T > n)
\end{aligned}$$

Comme $(T > n) = (Y_n > 1)$, on a $0 \leq n\mathbb{P}(T > n) \leq nm^n \to 0$ (car $m \in [0,1[$ et par croissances comparées). Un passage à la limite donne donc

$$\mathbb{E}(T) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(T > k)$$

On utilise à nouveau $\mathbb{P}(T > k) = \mathbb{P}(Y_k \geq 1) \leq m^k$ pour en déduire que

$$\mathbb{E}(T) \leq \sum_{k=0}^{\infty} m^k = \frac{1}{1-m}$$

**II.C**

**1.** Comme on l'a dit en **III.A.3**, l'événement $\bigcup_{k\in\mathbb{N}}(Y_k = 0)$ est l'événement “la population finit par s'éteindre”. Dans le cas $m \leq 1$, cet ensemble est de probabilité 1 (question **III.1.4**).

**2.**

a. Fixons $k \in \mathbb{N}$. Comme $Z_{n+1} = Z_n + Y_n \geq Z_n$, $(Z_{n+1} \leq k) \subset (Z_n \leq k)$ et la suite $(\mathbb{P}(Z_n = k))_{k \geq 0}$ est donc décroissante. Elle est minorée par 0 et converge donc d'après le théorème de limite monotone. D'après le théorème de la limite monotone pour une suite décroissante d'ensembles, on a

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(Z_n \leq k) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} (Z_n \leq k)\right)$$

Si $\omega \in \bigcap_{n=1}^{\infty} (Z_n \leq k)$ alors $\forall n,\ Z_n(\omega) \leq k$ et donc $Z(\omega) \leq k$ (passage à la limite). Réciproquement, si $Z(\omega) \leq k$ alors $\forall n,\ Z_n(\omega) \leq k$ (la suite croissante $(Z_n(\omega))_n$ est inférieure à sa limite) et donc $\omega \in \bigcap_{n=1}^{\infty} (Z_n \leq k)$. Finalement,

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(Z_n \leq k) = \mathbb{P}(Z \leq k)$$

b. On a $\mathbb{P}(Z_n = k) = \mathbb{P}(Z_n \leq k) - \mathbb{P}(Z_n \leq k-1)$ et donc (on passe à la limite)

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(Z_n = k) = \mathbb{P}(Z \leq k) - \mathbb{P}(Z \leq k-1) = \mathbb{P}(Z = k)$$

c. Fixons $K \in \mathbb{N}$ et $s \in [0, 1[$. On a (toutes les séries convergent absolument)

$$\begin{aligned} |G_{Z_n}(s) - G_Z(s)| &= \left| \sum_{k \geq K} (\mathbb{P}(Z_n = k) - \mathbb{P}(Z = k)) s^k \right| \\ &\leq \sum_{k=0}^{\infty} |\mathbb{P}(Z_n = k) - \mathbb{P}(Z = k)| s^k \end{aligned}$$

On découpe la somme. Pour les indices $\leq K$, on majore $s^k$ par 1 (la somme est finie et cela ne pose pas de problème d'existence). Pour $k \geq K+1$, on remarque que $|\mathbb{P}(Z_n = k) - \mathbb{P}(Z = k)| \leq 1$ (car les deux termes sont entre 0 et 1 et leur différence est donc entre $-1$ et 1). Comme $\sum (s^k)$ converge, on n'a à nouveau pas de problème d'existence. On obtient

$$\begin{aligned} |G_{Z_n}(s) - G_Z(s)| &\leq \sum_{k=0}^{K} |\mathbb{P}(Z_n = k) - \mathbb{P}(Z = k)| + \sum_{k \geq K+1} s^k \\ &= \sum_{k=0}^{K} |\mathbb{P}(Z_n = k) - \mathbb{P}(Z = k)| + \frac{s^{K+1}}{1-s} \end{aligned}$$

*Remarque : c'est un poil mieux que dans l'énoncé puisque* $s \in [0, 1[$.

d. Soit $s \in [0, 1[$. Fixons $\varepsilon > 0$ ; comme $\frac{s^p}{1-s} \to 0$ quand $p \to +\infty$, on peut trouver un rang $K$ pour lequel ce terme est $\leq \varepsilon/2$. $K$ étant fixé, $\sum_{k=0}^{K} |\mathbb{P}(Z_n = k) - \mathbb{P}(Z = k)| \to 0$ quand $n \to +\infty$ (somme d'un nombre constant de suites de limite nulle) et il existe un rang $n_0$ à partir duquel ce terme est aussi $\leq \varepsilon/2$. On a ainsi

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 / \ \forall n \geq n_0,\ |G_{Z_n}(s) - G_Z(s)| \leq \varepsilon$$

ce qui signifie que

$$\lim_{n \to +\infty} G_{Z_n}(s) = G_Z(s)$$

Ceci reste vrai pour $s = 1$ (la suite est constante égale à 1). On a finalement $(G_{Z_n})$ qui converge simplement sur $[0, 1]$ vers $G_Z$.

**3.**

a. On a $Z_1 = 1 + Y_1$ et comme une variable constante est indépendante de toute autre variable, la question **II.A.1** indique que

$$G_{Z_1}(s) = G_1(s) G_{Y_1}(s) = s f(s)$$

b. Avec le résultat admis et **III.C.2** on a ($f$ étant continue)

$$\forall s \in [0,1],\ G_Z(s) = \lim_{n\to+\infty} G_{Z_n}(s) = sf(G_Z(s))$$

c. Le cours nous indique que $Z$ est d'espérance finie si et seulementy si $G_Z$ est dérivable en 1 et qu'alors $\mathbb{E}(Z) = G'_Z(1)$.
On sait qu'une fonction génératrice est dérivable sur $[0,1[$. La question précédente donne

$$\forall s \in [0,1[,\ G'_Z(s) = f(G_Z(s)) + G'_Z(s)f'(G_Z(s))$$

ce que l'on peut écrire

$$\forall s \in [0,1[,\ (1 - f'(G_Z(s)))G'_Z(s) = f(G_Z(s))$$

Quand $s \to 1$, $1 - f'(G_Z(s))) \to 1 - m$ et $f(G_Z(s)) \to f(1) = 1$ (les fonctions génératrices sont continues sur $[-1,1]$).
Si $m \in [0,1[$, on a donc $G'_Z(s) \to \frac{1}{1-m}$ quand $s \to 1$. D'après le théorème de limite de la dérivée (corollaire des accroissement finis et utilisable avec $G_Z$ qui est continue sur $[0,1]$ et de classe $C^1$ sur $[0,1[$), $G_Z$ est dérivable en 1 et $G'_Z(1) = \frac{1}{1-m}$.
Si $m = 1$, on a $G'_Z$ de limite infinie en 1 et le même théorème indique que $G_Z$ est non dérivable en 1.
Finalement, $\mathbb{E}(Z) < +\infty$ si et seulement si $m < 1$ et dans ce cas, $\mathbb{E}(Z) = \frac{1}{1-m}$.

# IV. Un exemple

Notons que l'énoncé est cohérent puisque les $p_k$ vérifient les bonnes hypothèses (positifs, de somme 1 et avec un terme au moins d'indice $> 1$ qui est non nul).

**IV.A** On a

$$\forall t \in [0,1],\ f(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{2^{k+1}} = \frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{t}{2}} = \frac{1}{2-t}$$

$f$ est dérivable sur $[0,1]$ avec $f'(t) = \frac{1}{(2-t)^2}$. En particulier,

$$m = f'(1) = 1$$

**IV.B** $f$ est croissante sur $[0,1[$ (dérivée positive) et donc $f([0,1[) = [f(0), f(1)[= [0,1[$. Soit $t \in [0,1[$; comme $\varphi_0(t) = t \in [0,1[$ et $\varphi_{n+1}(t) = f(\varphi_n(t))$, une récurrence immédiate donne

$$\forall t \in [0,1[,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \varphi_n(t) \in [0,1[$$

**IV.C** Le calcul donne

$$a_{n+1}(t) = \frac{1}{f(\varphi_n(t)) - 1} = \frac{2 - \varphi_n(t)}{-1 + \varphi_n(t)} = a_n(t) - 1$$

**IV.D** Il en découle que $a_n(t) = a_0(t) - n = \frac{1}{t-1} - n = \frac{n+1-nt}{t-1}$. Comme $\varphi_n(t) = 1 + \frac{1}{a_n(t)}$, on trouve que

$$\varphi_n(t) = \frac{n + (1-n)t}{1 + n - nt}$$

**IV.E** $\mathbb{P}(Y_n = k)$ est le coefficient devant $t^k$ dans le DSE de $\varphi_n(t)$. Or, pour $n \geq 1$, on a (à l'aide d'une division euclidienne non explicitée)

$$\varphi_n(t) = \frac{n-1}{n} + \frac{1}{n}\frac{1}{1+n-nt} = \frac{n-1}{n} + \frac{1}{n(1+n)}\frac{1}{1-\frac{n}{1+n}t}$$

et donc (développement de $\frac{1}{1-u}$ et regroupement des termes constants)

$$\varphi_n(t) = \frac{n}{1+n} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{n^{k-1}}{(1+n)^{k+1}} t^k$$

On a ainsi prouvé que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(Y_n = 0) = \frac{n}{1+n} \quad \text{et} \quad \forall k \geq 1,\ \mathbb{P}(Y_n = k) = \frac{n^{k-1}}{(1+n)^{k+1}}$$

Comme $Y_0 = 1$, la formule reste valable dans le cas $n = 0$.

**IV.F** On a $(T > n) = (Y_n \geq 1)$ et donc

$$\mathbb{P}(T > n) = \mathbb{P}(Y_n \geq 1) = 1 - \mathbb{P}(Y_n = 0) = 1 - \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1}$$

On peut reprendre le calcul de **III.B.2** pour obtenir

$$\sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}(T = k) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(T > k) - n\mathbb{P}(T > n)$$

$n\mathbb{P}(T > n) \to 1$ mais $\sum(\mathbb{P}(T > k))$ diverge (série de Riemann). Ainsi, $T$ n'admet pas d'espérance finie (la série ne converge pas donc ne converge pas absolument ; notons qu'ici les notions coïncident puisque les termes sont positifs).

**IV.G** **III.C.3** donne une relation vérifiée par $x = G_Z(s)$ : $x = \frac{s}{2-x}$. On trouve donc (résolution d'une équation de degré 2) que $G_z(s)$ vaut $1 \pm \sqrt{1-s}$. Mais $G_z(s) \leq 1$ quand $s \in [0, 1[$ et donc

$$\forall s \in [0, 1[,\ 1 - \sqrt{1-s}$$

Pour obtenir la loi de $Z$, on effectue un DSE de cette fonction et on identifie le coefficient de $s^k$ comme $\mathbb{P}(Z = k)$ :

$$\mathbb{P}(Z = 0) = 0 \quad \text{et} \quad \forall k \geq 1,\ \mathbb{P}(Z = k) = \frac{(-1)^{k+1}}{k!} \prod_{i=0}^{k-1} \left(\frac{1}{2} - i\right) = \frac{1}{2^k k!} \prod_{i=1}^{k-1} (2i-1) = \frac{(2k)!}{(2^k k!)^2}$$

# V. Cas surcritique

**V.A** Les événements dont les $u_n^{(r)}$ sont les probabilités sont incompatibles (on ne peut voir arriver un événement pour la première fois à deux instants différents). $\sum(u_n^{(r)})$ est donc convergente (de somme $\leq 1$). Pour tout $s \in [-1, 1]$, on a donc $|u_n^{(r)} s^n| \leq u_n^{(r)}$ qui est terme général d'une série absolument convergente (et a fortiori convergente).

**V.B**

**1.** $W_1 = X_{0,1} + \cdots + X_{0,k}$. Si $W_1 \leq k$ alors il existe $j$ tel que $X_{0,j} \leq 1$ c'est à dire

$$(W_1 \leq k) \subset \bigcup_{j=1}^{k} (X_{0,j} \leq 1)$$

En passant au complémentaire

$$\bigcap_{j=1}^{k} (X_{0,j} > 1) \subset (W_1 > k)$$

En passant aux probabilités, et comme les $X_{0,i}$ sont indépendantes,

$$(1 - p_0 - p_1)^k \leq \mathbb{P}(W_1 > k)$$

et donc

$$\mathbb{P}(W_1 > k) \geq (1 - p_0 - p_1)^k > 0$$

puisque $p_0 + p_1 \in [0, 1[$.

**V.C**

**1.** On se donne $n \in \mathbb{N}^*$ et $r \geq 2$.

Soit $\omega \in \Omega$ pour lequel la suite $(W_p)$ prend la valeur $k$ pour la $r$-ième fois exactement au rang $n$. Il existe un premier rang $i$ où $W_i = k$ (et $i \leq n - r + 1$). A partir du moment où l'on retrouve une population de taille $k$, l'expérience reprend alors comme initialement de façon indépendante de ce qui s'est passé lors des étapes précédentes. On cherche alors les événement donnant pour la $r-1$-ième fois une population égale à $k$ au bout de $n - i$ générations.

On partitionne ainsi l'événement dont on cherche la probabilité en $n - r - 1$ sous-ensembles disjoints. La probabilté du $i$-ème de ces sous-ensemble est $u_i u_{n-i}^{(r-1)}$.

On trouve finalement que

$$u_n^{(r)} = \sum_{i=1}^{n-r+1} u_i u_{n-i}^{(r-1)}$$

Comme $u_a^{(b)}$ est nul si $a < b$ (on ne peut avoir $b$ succès en strictement moins de $b$ épreuves), on peut ajouter les termes d'indices $n - r + 2, \dots, n - 1$ qui sont nuls et écrire que

$$u_n^{(r)} = \sum_{i=1}^{n-1} u_i u_{n-i}^{(r-1)}$$

**2.** En posant $u_0^{(r)} = 0$ pour tout $r \geq 1$ (et en particulier $u_0 = 0$), la relation précédente d'écrit aussi

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n^{(r)} = \sum_{i=0}^{n} u_i u_{n-i}^{(r-1)}$$

La suite $u^{(r)}$ est alors le produit de Cauchy des suites $u$ et $u^{r-1}$. Comme toutes les séries entières sont de rayon de convergence $\geq 1 > 0$, le cours nous indique que

$$\forall s \in ]-1, 1[,\ \sum_{n\geq 0} u_n^{(r)} s^n = \left(\sum_{n\geq 0} u_n s^n\right) \left(\sum_{n\geq 0} u_n^{(r-1)} s^n\right)$$

Comme les termes d'indice 0 sont nuls, on trouve finalement

$$\forall s \in ]-1, 1[,\ U_r(s) = U(s)U_{r-1}(s)$$

et ceci reste vrai pour $s = \pm 1$ par continuité des fonctions sur $[-1, 1]$. Un récurrence immédiate donne alors

$$\forall r \geq 1,\ U_r = U^r$$

**V.D**

**1.** $U(1)$ correspond à la probabilité que $(W_n)_{n\geq 1}$ prenne au moins une fois la valeur $k$ et on a donc

$$U(1) = 1 - u \in [0, 1[$$

Notons $E_r$ l'événement "la suite $(W_n)_{n\geq 1}$ prend au moins $r$ fois la valeur $k$". Si la suite prend au moins $r$ fois la valeur $k$, il y a bien un rang où elle prend pour la $r$-ième fois la valeur $k$ et réciproquement. Deux événement correspondant à des rangs différents sont bien sûr différents et ainsi

$$\mathbb{P}(E_r) = \sum_{n\geq 1} u_n^{(r)} = U_r(1) = U(1)^r = (1 - u)^r$$

Les $E_r$ formant une suite décroissante d'ensembles, la propriété de continuité décroissante indique (puisque $1 - u \in [0, 1[$)

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{r\geq 0} E_r\right) = \lim_{r\to+\infty} \mathbb{P}(E_r) = 0$$

Or, $\bigcap_{r\geq 0} E_r$ correspond à l'événement "la suite $(W_n)$ prend une infinité de fois la valeur $k$" et on a donc le résultat demandé.

**2.** Soit $k \geq 1$. On partitionne les événements en deux sous-ensembles $A$ et $\overline{A}$ : ceux pour lesquels on atteint la valeur $k$ au moins une fois et les autres. On note $B$ l'événement "la suite $Y$ prend la valeur $k$ une infinité de fois. Par formule des probabilités totales,

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B \cap A) + \mathbb{P}(B \cap \overline{A}) = \mathbb{P}(B \cap A)$$

Plus précisément, notons $A_i$ l'ensemble des événements correspondant à l'obtention d'une population $k$ pour la première fois au rang $i$. Les $A_i$ partitionnent $A$ et

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(B|A_i)$$

La question précédente nous apprend que $\mathbb{P}(B|A_i) = 0$ (si on tombe sur une population de $k$ individus, tout se passe ensuite comme dans l'expérience de cette partie) et finalement $\mathbb{P}(B) = 0$.

**V.E** Par théorème de la limite monotone pour une suite croissante d'événements, on a

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \overline{A_n}\right) = \lim_{N \to +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{N} \overline{A_n}\right)$$

Or, on a

$$\forall N \in \mathbb{N},\ 0 \leq \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{N} \overline{A_n}\right) \leq \sum_{n=0}^{N} \mathbb{P}(\overline{A_n}) = 0$$

et ainsi,

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \overline{A_n}\right) = 0$$

On en déduit que (le complémentaire d'une réunion est l'intersection des complémentaires)

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \overline{A_n}\right) = 1$$

**V.F** Si la suite $(Y_n(\omega))$ tend vers $+\infty$ alors elle finit pas dépasser définitivement en temps fini toute valeur $k$, ce qui implique qu'elle ne prend aucune valeur une infinité de fois. Réciproquement, si cette propriété a lieu alors pour tout entier $k_0$ et pour $j \in [0, k_0 - 1]$, la valeur $j$ n'est plus prise à partir d'un rang $n_j$ ; à partir du rang $\max(n_0, \dots, n_{k_0+1})$, on a $Y_n(\omega) \geq k_0$ et on a donc montré que $Y_n(\omega) \to +\infty$ (définition d'une limite infinie). L'événement "la suite $(Y_n)$ est de limite infinie" est donc égal à l'intersection des événements $A_k$ : "la suite $(Y_n)$ ne prend pas une infinité de fois la valeur $k$" et sa probabilité est

$$\beta = \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=0}^{\infty} A_k\right)$$

On a vu que les événements $A_k$ pour $k \geq 1$ sont tous de probabilité 1. L'événement $A_0$ correspond, lui, à l'événement "la suite $(Y_n)$ ne prend jamais la valeur 0" (prendre une fois la valeur 0 équivaut à prendre la valeur 0 à partir d'un certain rang) et sa négation est "la population finit par s'éteindre". On a donc $\mathbb{P}(A_0) = 1 - \alpha$.

Pour se ramener à la question précédente, j'utilise la formule des probabilités composées :

$$\beta = \mathbb{P}(A_0)\mathbb{P}_{A_0}\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right)$$

Les $A_k$, $k \geq 1$, étant de probabilité 1 pour la probabilité conditionnelle, on a ainsi

$$\beta = \mathbb{P}(A_0) = 1 - \alpha$$