Problème inspiré d'une épreuve de concours.

On note E l'espace vectoriel des suites réelles. La suite réelle de terme général u_n sera notée $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

On considère l'endomorphisme Δ de E qui à toute suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E associe la suite $v = \Delta(u)$ de terme général défini par

$$\forall n \in \mathbb{N} \ , \ v_n = (\Delta(u))_n = u_{n+1} - u_n$$

Partie I.

1) Montrer qu'une suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E converge si et seulement si la série de terme général $(\Delta(u))_n$ converge.

Pour tout $p \in \mathbb{N}$ on note Δ^p le p-ième itéré de Δ défini par

$$\Delta^0 = Id_E \ , \ \forall p \in \mathbb{N} \ , \ \Delta^{p+1} = \Delta \circ \Delta^p$$

On dit qu'une suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est complètement monotone si pour tous naturels n et p on a

$$(-1)^p(\Delta^p(u))_n > 0$$

2) Soit $f \in C^\infty(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$. Dans cette question on pose pour tout naturel n , $u_n = f(n)$.

a) Montrer que pour tout entier naturel n, il existe un réel x de l'intervalle $]n, n+1[$ tel que $(\Delta(u))_n = f'(x)$.

b) Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ on considère la propriété suivante :

$\mathcal{P}(p)$: $\forall f \in C^\infty(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$, $\forall n \in \mathbb{N}$, en posant $u_n = f(n)$, $\exists x \in]n, n+p[$ tel que $(\Delta^p(u))_n = f^{(p)}(x)$.

Montrer par récurrence sur p que cette propriété est réalisée pour tout $p \in \mathbb{N}^*$.

On appliquera l'hypothèse de récurrence à la fonction $g : x \mapsto f(x+1) - f(x)$ et à la suite $v_n = g(n)$.

c) On pose $f : x \mapsto \frac{1}{x+1}$.

i) Déterminer pour tout p la dérivée p-ième de f.

ii) Utiliser le b) afin de montrer que la suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N} \ , \ u_n = \frac{1}{n+1}$$

est complètement monotone.

3) Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$.

a) Expliciter, en fonction de u, le terme général w_n de la suite $w = \Delta^2(u) = \Delta(\Delta(u))$.

b) Expliciter, en fonction de u, le terme général z_n de la suite $z = \Delta^3(u) = \Delta(\Delta(\Delta(u)))$.

On définit T l'endomorphisme de E de E par

$$\forall u \in E \ , \ \forall n \in \mathbb{N} \ , \ (T(u))_n = u_{n+1}$$

c) Ecrire une relation simple entre Δ , T et Id.

d) En déduire que pour $u \in E$, $p \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$(\Delta^p(u))_n = \sum_{k=0}^{p} (-1)^{p-k} \binom{p}{k} u_{n+k}$$

4) Soit $b \in]0,1[$. Dans cette question on pose pour tout naturel n , $u_n = b^n$.

Utiliser le 3) pour calculer $(\Delta^p(u))_n$ pour tous p et n et en déduire que la suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est complètement monotone.

Partie II.

Soit ω une fonction continue et positive sur $[0,1]$ non identiquement nulle.
Dans toute cette partie on considèrera la suite u de terme général

$$u_n = \int_0^1 t^n \omega(t)\ dt$$

5) a) Montrer que la série de terme général $(-1)^k u_k$ converge et que

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k u_k = \int_0^1 \frac{\omega(t)}{1+t}\ dt$$

b) Montrer que pour tous naturels p et n

$$(-1)^p (\Delta^p(u))_n = \int_0^1 t^n (1-t)^p \omega(t)\ dt$$

c) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est complètement monotone.

d) Montrer que

$$\int_0^1 \frac{\omega(t)}{1+t}\ dt = \int_0^1 \sum_{p=0}^{\infty} \left(\frac{1-t}{2}\right)^p \omega(t)\ dt$$

e) Les 5/2 démontrent et les 3/2 admettent que

$$\int_0^1 \sum_{p=0}^{\infty} \left(\frac{1-t}{2}\right)^p \omega(t)\ dt = \sum_{p=0}^{\infty} \int_0^1 \left(\frac{1-t}{2}\right)^p \omega(t)\ dt$$

f) En déduire, en utilisant la question 3) d), que

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k u_k = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2^{p+1}} (\Delta^p(u))_0$$

6) Dans cette question on pose pour tout t, $\omega(t) = 1$.

Utiliser le 5) pour montrer que

$$\ln 2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(p+1)2^{p+1}}$$

Partie III.

Dans cette partie on se donne une suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que la série de terme général $(-1)^n u_n$ soit convergente et on note S sa somme.

7) Donner une condition suffisante sur la suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour que cela soit réalisé

Dans la suite on ne supposera pas la réalisation de la condition du 7) mais seulement l'hypothèse de convergence de la série de terme général $(-1)^n u_n$

Le but est de démontrer que

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k u_k = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{2^{p+1}} (\Delta^p(u))_0$$

8) a) Utiliser le 3) d) pour montrer que

$$\forall p \in \mathbb{N} \ , \ \lim_{n\to\infty} (\Delta^p(u))_n = 0$$

b) Montrer que pour tout suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de limite nulle on a

$$\lim_{p\to\infty} \frac{1}{2^p} \sum_{k=0}^{p} \begin{pmatrix} p \\ k \end{pmatrix} r_k = 0$$

On pourra utiliser une preuve similaire à celle du théorème de Césaro.

9) a) En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N} \ , \ u_n = \sum_{p=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^p}{2^p} (\Delta^p(u))_n - \frac{(-1)^{p+1}}{2^{p+1}} (\Delta^{p+1}(u))_n \right)$$

b) Montrer que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{(-1)^p}{2^p} (\Delta^p(u))_n - \frac{(-1)^{p+1}}{2^{p+1}} (\Delta^{p+1}(u))_n \right) = \frac{(-1)^p}{2^{p+1}} (\Delta^p(u))_0$$

10) a) On pose pour tout entier naturel n

$$E_n = \sum_{p=0}^{n} \frac{(-1)^p}{2^{p+1}} (\Delta^p(u))_0$$

Montrer que

$$E_n - S = -\frac{1}{2^{n+1}} \sum_{p=0}^{n+1} \begin{pmatrix} n+1 \\ p \end{pmatrix} \left(\sum_{k=p}^{+\infty} (-1)^k u_k \right)$$

b) Conclure en appliquant le 8)b).

11) Soit $b \in]0,1[$. Dans cette question on pose pour tout naturel n , $u_n = b^n$.

Pourquoi la série de terme général $(-1)^n u_n$ est-elle convergente ?

Quelle égalité nous est donnée par le résultat démontré ?