DS 5 : CORRECTION

Vendredi 22 décembre 2017

L'usage des calculatrices n'est pas autorisé

Exercice :

L'apparition des termes $p+q$ fait penser à sommer en diagonale.
La série est à termes positifs donc a même nature que la série des sommes en diagonales.
Pour n fixé, $S_n = \sum_{p+q=n} a_{p,q} = \sum_{p=0}^{n} \dfrac{1}{n+1}\dfrac{1}{2^n} = \dfrac{1}{(n+1)2^n}\sum_{p=0}^{n} 1 = \dfrac{1}{2^n}$.

Par théorème de sommation en diagonale, on a alors $\sum_p \sum_q a_{p,q} = \sum_n S_n = \sum_n \dfrac{1}{2^n} = \dfrac{1}{1-1/2} = 2$ par série géométrique de raison $1/2$.

Exercice :

1. Soit $\varepsilon > 0$. Par intégration par parties (les fonctions sont C^1 sur $[\varepsilon, 1]$, $\int_\varepsilon^1 \dfrac{\arctan t}{t}\,\mathrm{d}t = [\ln(t)\arctan(t)]_\varepsilon^1 - \int_\varepsilon^1 \dfrac{\ln t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.
   Lorsque ε tend vers 0, $\ln(t\varepsilon)\arctan(\varepsilon) \sim \varepsilon\ln(\varepsilon) \to 0$. Donc le crochet généralisé est convergent (de limite nulle) et les intégrales généralisées $\int_0^1 \dfrac{\arctan t}{t}\,\mathrm{d}t$ et $\int_0^1 \dfrac{\ln t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ ont même nature, donc convergentes car $\int_0^1 \dfrac{\arctan t}{t}\,\mathrm{d}t$ est faussement impropre en 0 (car $\arctan(t) \sim_0 t$).
   On obtient bien la formule demandée.
2. Pour tout $t \in]0,1[$, on a $t^2 \in]0,1[$ et donc par DSE, $\dfrac{-1}{1+t^2} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n-1}t^{2n}$. Ainsi, $\dfrac{-\ln t}{1+t^2} = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^{n-1}t^{2n}\ln t = \sum f_n(t)$.
   Les fonctions f_n ainsi définies sont continues par morceaux et la série $\sum f_n$ converge simplement sur $]0,1[$. Enfin, $\int_0^1 |f_n| = \dfrac{1}{(2n+1)^2}$ qui est le terme général d'une série convergente par comparaison avec la série à termes positifs $\sum \dfrac{1}{4n^2}$ convergente par critère des séries de Riemann $(2 > 1)$.
   Finalement, par théorème d'intégration terme à terme de Beppo-Levi, on obtient la formule demandée :
   $$\int_0^1 \frac{\arctan t}{t}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$$
3. On peut retrouver ce résultat en admettant que
   $$\forall t \in \mathbb{R}, \arctan(t) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}t^{2n+1}.$$
   et en appliquant à nouveau le théorème d'intégration terme à terme.

Problème : autour de la fonction zeta alternée de Riemann

I. Généralités

1. Soit $x \in \mathbb{R}$; si $x > 0$, alors la suite $\left(\dfrac{1}{n^x}\right)_{n\geq 1}$ est décroissante (1) vers 0 (2) ; d'après le critère spécial des séries alternées, la série $\sum_{n\geq 1} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ converge ; si $x \leq 0$, la suite $\left(\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^x}\right)_{n\geq 1}$ ne converge pas vers 0, donc la série $\sum_{n\geq 1} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ diverge (grossièrement).

2. Comme $|-t| < 1$, la série géométrique $\sum (-t)^n$ converge et sa somme vaut $\sum_{k=0}^{+\infty} (-t)^k = \dfrac{1}{1-(-t)} = \dfrac{1}{1+t}$; donc la suite (g_n) converge simplement vers la fonction $g : t \mapsto \dfrac{1}{1+t}$ sur $[0,1[$.

- La suite (g_n) converge simplement vers la fonction g sur $[0,1[$;
- la fonction g et les fonctions g_n, $n \in \mathbb{N}$ sont continues (par morceaux) ;
- *condition de domination* : $\forall t \in [0,1[,\ |g_n(t)| = \left|\dfrac{1-(-t)^{n+1}}{1+t}\right| = \dfrac{1-(-t)^{n+1}}{1+t} \leq \dfrac{2}{1+t} = \phi(t)$; la fonction ϕ est indépendante de n, continue (même sur $[0,1]$) et intégrable sur $[0,1[$.

D'après le théorème de convergence dominée, la suite $\left(\int_0^1 g_n\right)$ converge vers $\int_0^1 g$.

Or, $\int_0^1 g_n = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k}{k+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \dfrac{(-1)^{k-1}}{k}$; donc $F(1) = \int_0^1 g = \Big[\ln(1+t)\Big]_0^1 = \ln 2$.

3. $\forall n \geq 1, \forall x \geq 2, \left|\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^x}\right| \leq \dfrac{1}{n^2}$. Comme la série $\sum_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^2}$ est indépendante de n et convergente, la série $\sum_{n\geq 1} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ converge normalement sur $[2,+\infty[$.

Donc son reste $R_n(x) = \sum_{n\geq N+1} \dfrac{1}{n^x}$ tend vers 0 et pour N assez grand $|R_N| \leq \varepsilon/2$.

4. Par ailleurs, $|F(x) - 1| \leq \sum_{n=2}^{N} \dfrac{1}{n^x} + \sum_{n\geq N+1} \dfrac{1}{n^x}$. Lorsque x tend vers $+\infty$, la somme (finie) $\sum_{n=2}^{N} \dfrac{1}{n^x}$ tend vers 0 par opérations sur les limites car $\dfrac{1}{n^x} \to 0$ pour $n \geq 2$. Il existe donc $A > 0$ tel que pour tout $x > A$, $\sum_{n=2}^{N} \dfrac{1}{n^x} \leq \varepsilon/2$

Finalement, pour $x > A$, $|F(x) - 1| \leq \varepsilon$ donc F tend vers 1 lorsque x tend vers $+\infty$.

5. *Lien avec* ζ

Pour $x > 1$, $F(x) - \zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n-1} - 1}{n^x} = \sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{-2}{(2k)^x} = -2^{1-x} \sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{1}{k^x} = -2^{1-x}\zeta(x)$. On en déduit l'égalité : $F(x) = (1 - 2^{1-x})\zeta(x)$.

6. Comme $2^{1-x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$, $F(x) \sim \zeta(x)$ au voisinage de $+\infty$ et donc $\zeta(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$.

7. *Dérivabilité de* F

a. Soit $x > 0$. La fonction $h_x : t \mapsto \dfrac{\ln t}{t^x}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$ et $h_x'(t) = \dfrac{t^{x-1}(1 - x\ln t)}{t^{2x}}$.
Donc h_x' est négative sur l'intervalle $[\mathrm{e}^{1/x}, +\infty[$ et positive sur $]0, \mathrm{e}^{1/x}]$. Donc h_x est décroissante sur $[\mathrm{e}^{1/x}, +\infty[$ et croissante sur $]0, \mathrm{e}^{1/x}]$.
On en déduit que la suite $\left(\dfrac{\ln n}{n^x}\right)_{n\geq 1}$ est décroissante à partir du rang $\lfloor \mathrm{e}^{1/x} \rfloor + 1$ qui est un entier supérieur ou égal à $\mathrm{e}^{1/x}$.

b. $f_n : x \mapsto (-1)^{n-1}\mathrm{e}^{-x\ln n}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et $f_n'(x) = (-1)^n \dfrac{\ln n}{n^x}$.

Soit $a > 0$. On pose $N_a = \lfloor \mathrm{e}^{1/a} \rfloor + 1$. Pour tout $x \geq a$, la suite $\left(\dfrac{\ln n}{n^x}\right)_{n \geq N_a}$ tend vers 0 en décroissant ; donc la série alternée $\sum\limits_{n \geq N_a} f_n'(x)$ converge et, pour $n \geq N_a$, son reste d'ordre n, $\rho_n(x)$, vérifie :

$$|\rho_n(x)| \leq \left|(-1)^{n+1}\frac{\ln(n+1)}{(n+1)^x}\right| \leq \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^a}.$$

Donc $\sup\limits_{x \geq a} |\rho_n(x)| \leq \dfrac{\ln(n+1)}{(n+1)^a} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$. Donc la série $\sum\limits_{n \geq 1} f_n'$ converge uniformément sur $[a, +\infty[$.

- Pour tout $n \geq 1$, la fonction f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$;
- la série $\sum\limits_{n \geq 1} f_n$ converge simplement sur $]0, +\infty[$ et sa somme est F ;
- la série $\sum\limits_{n \geq 1} f_n'$ converge uniformément sur tout segment inclus dans $]0, +\infty[$.

D'après le théorème de dérivation terme à terme, F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et

$$\forall x > 0,\ F'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n^x}.$$

II. Produit de Cauchy de la série alternée par elle-même

8. *Étude de la convergence*

a. Lorsque $x > 1$, la série $\sum\limits_{n \geq 1} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ converge absolument ; d'après le théorème du produit de Cauchy (ou somme en diagonales), la série produit de $\sum\limits_{n \geq 1} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ par elle-même converge absolument et sa somme vaut : $\left(\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^x}\right)^2 = (F(x))^2$.

b. Pour $x > 0$, $c_n(x) = (-1)^{n-2} \sum\limits_{k=1}^{n-1} \dfrac{1}{[k(n-k)]^x}$. Comme $k \mapsto k(n-k)$ est maximum quand $k = \dfrac{n}{2}$ et que la somme comporte $n-1$ termes, $|c_n(x)| = \sum\limits_{k=1}^{n-1} \dfrac{1}{[k(n-k)]^x} \geq (n-1)\dfrac{1}{[(n/2)^2]^x} = \dfrac{(n-1)4^x}{n^{2x}}$.

Pour $0 < x \leq \dfrac{1}{2}$, $\dfrac{(n-1)4^x}{n^{2x}}$ a une limite strictement positive (finie ou non), donc la suite $(c_n(x))$ ne converge pas vers 0. Donc la série $\sum\limits_{n \geq 2} c_n(x)$ diverge grossièrement.

9. *Cas où $x = 1$*

a. $\dfrac{1}{[X]\,(n-[X])} = \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{1}{[X]} + \dfrac{1}{n-[X]}\right)$. Donc

$$\begin{aligned} c_n(1) &= (-1)^{n-2} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k(n-k)} = (-1)^{n-2}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{n-k}\right) = (-1)^{n-2}\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{n-k}\right) \\ &= 2(-1)^{n-2}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k} = 2(-1)^{n-2}\frac{H_{n-1}}{n}. \end{aligned}$$

b. *Monotonie*

$$\begin{aligned}\frac{H_{n-1}}{n}-\frac{H_n}{n+1} &= \frac{1}{n}\left(H_n-\frac{1}{n}\right)-\frac{H_n}{n+1}=H_n\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)-\frac{1}{n^2}\\ &\geq \left(1+\frac{1}{2}\right)\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{n^2}=\frac{n-2}{2n^2(n+1)}\geq 0.\end{aligned}$$

Donc la suite $\left(\dfrac{H_{n-1}}{n}\right)_{n\geq 2}$ est décroissante.

c. Par comparaison séries/intégrales avec la fonction $t\mapsto 1/t$, on peut établir le résultat classique : $H_n\sim \ln n$ au voisinage de $+\infty$. Donc la suite $\left(\dfrac{H_{n-1}}{n}\right)_{n\geq 2}$ converge vers 0 en décroissant et la série alternée $\sum\limits_{n\geq 2} c_n(1)$ converge.

III. Calcul de la somme d'une série à l'aide d'une étude de ζ au voisinage de 1

10. *Développement asymptotique en 1*

a. On pose $h=x-1$. Comme F est dérivable en 1, au voisinage de 1, on a :

$$F(x)=F(1)+hF'(1)+o(h)=\ln 2+hF'(1)+o(h).$$

On a aussi : $1-2^{1-x}=1-\mathrm{e}^{-h\ln 2}=h\ln 2-\dfrac{\ln^2 2}{2}h^2+o(h^2)$ au voisinage de $x=1$.

b. *Développement de ζ*

$$\begin{aligned}\zeta(x) &= \frac{F(x)}{1-2^{1-x}}=\frac{\ln 2+hF'(1)+o(h)}{h\ln 2-\dfrac{\ln^2 2}{2}h^2+o(h^2)}=\frac{1}{h\ln 2}\,\frac{\ln 2+hF'(1)+o(h)}{1-\dfrac{\ln 2}{2}h+o(h)}\\ &= \frac{1}{h\ln 2}\left(\ln 2+hF'(1)+o(h)\right)\left(1+\frac{\ln 2}{2}h+o(h)\right)=\frac{1}{h\ln 2}\left(\ln 2+h\left(F'(1)+\frac{\ln^2 2}{2}\right)+o(h)\right)\\ &= \frac{1}{h}+\left(\frac{F'(1)}{\ln 2}+\frac{\ln 2}{2}\right)+o(1)\end{aligned}$$

11. *Développement asymptotique en 1 (bis)*

a. Pour $n\geq 1$ et $x\in[1,2]$, $t\mapsto \dfrac{1}{t^x}$ est décroissante sur $[n,n+1]$ (qui est un intervalle de longueur 1), donc $1.\dfrac{1}{(n+1)^x}\leq \displaystyle\int_n^{n+1}\frac{\mathrm{d}t}{t^x}\leq 1.\frac{1}{n^x}$. On en déduit que : $0\leq v_n(x)\leq \dfrac{1}{n^x}-\dfrac{1}{(n+1)^x}$.

b. Pour $x\in[1,2]$, la suite $\left(\dfrac{1}{n^x}\right)_{n\geq 1}$ converge (vers 0) ; comme $\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\dfrac{1}{k^x}-\dfrac{1}{(k+1)^x}\right)=1-\dfrac{1}{(n+1)^x}$, la série $\sum\limits_{n\geq 1}\left(\dfrac{1}{n^x}-\dfrac{1}{(n+1)^x}\right)$ converge. De l'encadrement du (a), on déduit la convergence de la série $\sum\limits_{n\geq 1} v_n(x)$.

c. Pour $x\in]1,2]$, $\sum\limits_{k=1}^{n} v_k(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k^x}-\displaystyle\int_1^{n+1}\frac{\mathrm{d}t}{t^x}\xrightarrow[n\to+\infty]{}\zeta(x)-\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^x}=\zeta(x)-\frac{1}{x-1}$.

d. La série $\sum\limits_{n\geq 1} v_n$ converge simplement sur $[1,2]$. On note $R_n(x)=\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} v_k(x)$ le reste d'ordre n de la série. D'après (a), $0\leq R_n(x)\leq \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty}\left(\dfrac{1}{k^x}-\dfrac{1}{(k+1)^x}\right)=\dfrac{1}{(n+1)^x}-\lim_{k\to+\infty}\dfrac{1}{k^x}=\dfrac{1}{(n+1)^x}$. Donc $\sup\limits_{x\in[1,2]}|R_n(x)|\leq \dfrac{1}{(n+1)^1}\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Donc la série $\sum\limits_{n\geq 1} v_n$ converge uniformément sur $[1,2]$.

e. Pour $x \in]1,2]$, $v_n(x) = \dfrac{1}{n^x} - \dfrac{1}{1-x}\left(\dfrac{1}{n^{x-1}} - \dfrac{1}{(n+1)^{x-1}}\right)$; $v_n(1) = \dfrac{1}{n} - \ln(n+1) + \ln n$.
v_n est continue, sauf peut-être en 1.
En 1 : en posant $h = x-1$, $\dfrac{1}{n^x} = \dfrac{1}{n} + o(1)$ par continuité de l'exponentielle $x \mapsto n^{-x}$ en 1 et $\dfrac{1}{1-x}\left(\dfrac{1}{n^{x-1}} - \dfrac{1}{(n+1)^{x-1}}\right) = \dfrac{1}{h}\left(\mathrm{e}^{-h\ln n} - \mathrm{e}^{-h\ln(n+1)}\right) = \dfrac{1}{h}\Big((1-h\ln n+o(h)) - (1-h\ln(n+1)+o(h)\Big) = \ln(n+1) - \ln n + o(1)$; donc $v_n(x) = \dfrac{1}{n} + \ln(n+1) - \ln n + o(1)$. Donc v_n est continue en 1.
On en déduit que la série $\sum\limits_{n\geq 1} v_n$ est une série de fonctions continues sur $[1,2]$. La convergence uniforme sur $[1,2]$ entraîne donc la continuité de sa somme sur $[1,2]$.
On en déduit que $\zeta(x) - \dfrac{1}{x-1} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} v_n(x) = \left(\sum\limits_{n=1}^{+\infty} v_n(1)\right) + o(1) = \gamma + o(1)$ au voisinage de 1^+. D'où $\zeta(x) = \dfrac{1}{x-1} + \gamma + o(1)$ au voisinage de 1^+.

12. *Application*
Par unicité du développement limité en 1^+ (éventuellement en multipliant par $(x-1)$), on déduit de 8.(b) et 9.(e) les égalités $a = 1$ et $\dfrac{F'(1)}{\ln 2} + \dfrac{\ln 2}{2} = b = \gamma$. D'où $F'(1) = \ln 2\left(\gamma - \dfrac{\ln 2}{2}\right)$.
D'après **I.**4.(b), $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}\ln n}{n} = -F'(1) = \ln 2\left(\dfrac{\ln 2}{2} - \gamma\right)$.

IV. Calcul de $\zeta(4)$ et application à la physique :

Pour $x > 1$, on pose $\zeta(x) = \sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^x}$. On rappelle (et on admet) que $\zeta(2) = \sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^2} = \dfrac{\pi^2}{6}$.
Pour $m \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $\phi(m,n) = \dfrac{2}{mn^3} + \dfrac{1}{m^2n^2} + \dfrac{2}{m^3n}$.

13. a. Soit
$$\sum_{m\geq 1}\sum_{n\geq 1}\phi(m,n) - \sum_{m\geq 1}\sum_{n\geq 1}\phi(m,n+m) - \sum_{m\geq 1}\sum_{n\geq 1}\phi(m+n,n).$$
D'une part, on peut vérifier que $\phi(m,n) - \phi(m,n+m) - \phi(m+n,n) = \dfrac{2}{m^2n^2}$.
Alors
$$\begin{aligned}\sum_{m\geq 1}\sum_{n\geq 1}\phi(m,n) - \sum_{m\geq 1}\sum_{n\geq 1}\phi(m,n+m) - \sum_{m\geq 1}\sum_{n\geq 1}\phi(m+n,n) &= \sum_{m\geq 1, n\geq 1}\frac{2}{m^2n^2}\\ &= \sum_{m\geq 1}\left(\sum_{n\geq 1}\frac{2}{m^2n^2}\right) = \sum_{m\geq 1}\frac{2}{m^2}\left(\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}\right)\\ &= 2\left(\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}\right)\left(\sum_{m\geq 1}\frac{1}{m^2}\right) = 2\zeta(2)^2.\end{aligned}$$
Par ailleurs :
La première série correspond à la somme de tous les termes $\phi(a,b)$ pour $(a,b) \in (\mathbb{N}^*)^2$ (plan supérieur droit).
La seconde série correspond à la somme des termes $\phi(a,b)$ tels que $(a < b)$ situés strictement au dessus de la diagonale du quart de plan.
La troisième série correspond à la somme des termes $\phi(a,b)$ tels que $(a > b)$ situés strictement en dessous de la diagonale du quart de plan.
Finalement, l'ensemble correspond à la somme des termes $\phi(a,b)$ tels que $a = b$ (la diagonale du plan), c'est à dire $\sum_{a\in\mathbb{N}}\phi(a,a) = \sum_{n\geq 1}\dfrac{5}{a^4} = 5\cdot\zeta(4)$.

b. Donc $5\zeta(4) = 2\zeta(2)^2 = 2\dfrac{\pi^4}{36}$ et on peut alors en déduire que

$$\zeta(4) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

14. Déterminer, après avoir justifié son existence, et en détaillant les calculs l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^3}{\mathrm{e}^t - 1}\,\mathrm{d}t$

Pour $t > 0$, comme $0 \leq \exp(-t) < 1$, on a $\dfrac{t^3}{e^t - 1} = t^3 e^{-t}\dfrac{1}{1 - e^{-t}} = t^3 \sum_{n\in\mathbb{N}} e^{-(n+1)t} = \sum f_n(t)$.
Chaque f_n est continue sur $]0, +\infty[$, positives et intégrable car faussement impropre en 0 et $o(1/t^2)$ en $+\infty$. La série de fonction converge simplement vers f qui est continue et intégrable.
Pour $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int |f_n| = \frac{1}{(n+1)^4}\int_0^{+\infty} u^3 \exp(-u)\,\mathrm{d}u$ en posant $u = (n+1)t$ changement de variables bijectif.
Par IPP ou en reconnaissant la fonction Γ, on a finalement $\displaystyle\int |f_n| = \frac{6}{(n+1)^4}$ qui est le terme général d'un série convergente par critère de Riemann.
Donc par intégration terme à terme de Beppo-Levi, $\displaystyle\int f = \sum_{n\geq 0} \frac{6}{(n+1)^4} = 6\zeta(4) = \frac{\pi^4}{15}$.

15. Soit $M = \dfrac{c}{4}\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \frac{1}{\exp(\frac{hc}{k_B\lambda T}) - 1}\,\mathrm{d}\lambda$.
On pose $t = \varphi(\lambda) = \dfrac{hc}{k_B\lambda T}$ changement de variables bijectif.
Alors $\lambda = \dfrac{hc}{k_B t T}$ et $\mathrm{d}\lambda = \dfrac{-hc}{k_B t^2 T}\,\mathrm{d}t$
Et $M = \displaystyle\int_{+\infty}^0 2\pi hc^2 \frac{k_B^5 t^5 T^5}{h^5c^5} \frac{(-hc)}{k_B t^2 T} \frac{1}{\exp(t) - 1}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} 2\pi hc^2 \frac{k_B^5 t^5 T^5}{h^5 c^5} \frac{hc}{k_B t^2 T} \frac{1}{\exp(t) - 1}\,\mathrm{d}t$
Après simplifications et d'après l'intégrale calculée la question précédente,

$$... = \frac{2\pi k_B^4 T^4}{h^3 c^2} \frac{\pi^4}{15} = \sigma T^4$$

avec $\sigma = \dfrac{2\pi^5 k_B^4}{15 h^3 c^2}$.