

DS 5 : CORRECTION

Vendredi 22 décembre 2017

L'usage des calculatrices n'est pas autorisé

Exercice :

L'apparition des termes $p + q$ fait penser à sommer en diagonale.

La série est à termes positifs donc a même nature que la série des sommes en diagonales.

Pour n fixé, $S_n = \sum_{p+q=n} a_{p,q} = \sum_{p=0}^n \frac{1}{n+1} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{(n+1)2^n} \sum_{p=0}^n 1 = \frac{1}{2^n}$.

Par théorème de sommation en diagonale, on a alors $\sum_p \sum_q a_{p,q} = \sum_n S_n = \sum_n \frac{1}{2^n} = \frac{1}{1-1/2} = 2$ par série géométrique de raison $1/2$.

Exercice :

1. Soit $\varepsilon > 0$. Par intégration par parties (les fonctions sont C^1 sur $[\varepsilon, 1]$), $\int_{\varepsilon}^1 \frac{\arctan t}{t} dt = [\ln(t) \arctan(t)]_{\varepsilon}^1 - \int_{\varepsilon}^1 \frac{\ln t}{1+t^2} dt$.

Lorsque ε tend vers 0, $\ln(\varepsilon) \arctan(\varepsilon) \sim \varepsilon \ln(\varepsilon) \rightarrow 0$. Donc le crochet généralisé est convergent (de limite nulle) et les intégrales généralisées $\int_0^1 \frac{\arctan t}{t} dt$ et $\int_0^1 \frac{\ln t}{1+t^2} dt$ ont même nature, donc convergentes car $\int_0^1 \frac{\arctan t}{t} dt$ est faussement impropre en 0 (car $\arctan(t) \sim_0 t$).

On obtient bien la formule demandée.

2. Pour tout $t \in]0, 1[$, on a $t^2 \in]0, 1[$ et donc par DSE, $\frac{-1}{1+t^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n-1} t^{2n}$. Ainsi, $\frac{-\ln t}{1+t^2} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^{n-1} t^{2n} \ln t = \sum f_n(t)$.

Les fonctions f_n ainsi définies sont continues par morceaux et la série $\sum f_n$ converge simplement sur $]0, 1[$. Enfin, $\int_0^1 |f_n| = \frac{1}{(2n+1)^2}$ qui est le terme général d'une série convergente par comparaison avec la série à termes positifs $\sum \frac{1}{4n^2}$ convergente par critère des séries de Riemann ($2 > 1$).

Finalement, par théorème d'intégration terme à terme de Beppo-Levi, on obtient la formule demandée :

$$\int_0^1 \frac{\arctan t}{t} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$$

3. On peut retrouver ce résultat en admettant que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \arctan(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n+1} t^{2n+1}.$$

et en appliquant à nouveau le théorème d'intégration terme à terme.

Problème : autour de la fonction zeta alternée de Riemann

I. Généralités

1. Soit $x \in \mathbb{R}$; si $x > 0$, alors la suite $\left(\frac{1}{n^x}\right)_{n \geq 1}$ est décroissante (1) vers 0 (2); d'après le critère spécial des séries alternées, la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ converge; si $x \leq 0$, la suite $\left(\frac{(-1)^{n-1}}{n^x}\right)_{n \geq 1}$ ne converge pas vers 0, donc la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ diverge (grossièrement).

2. Comme $|-t| < 1$, la série géométrique $\sum (-t)^n$ converge et sa somme vaut $\sum_{k=0}^{+\infty} (-t)^k = \frac{1}{1 - (-t)} = \frac{1}{1+t}$; donc la suite (g_n) converge simplement vers la fonction $g : t \mapsto \frac{1}{1+t}$ sur $[0, 1[$.

- La suite (g_n) converge simplement vers la fonction g sur $[0, 1[$;
- la fonction g et les fonctions g_n , $n \in \mathbb{N}$ sont continues (par morceaux);
- *condition de domination* : $\forall t \in [0, 1[$, $|g_n(t)| = \left| \frac{1 - (-t)^{n+1}}{1+t} \right| = \frac{1 - (-t)^{n+1}}{1+t} \leq \frac{2}{1+t} = \phi(t)$; la fonction ϕ est indépendante de n , continue (même sur $[0, 1]$) et intégrable sur $[0, 1[$.

D'après le théorème de convergence dominée, la suite $\left(\int_0^1 g_n\right)$ converge vers $\int_0^1 g$.

Or, $\int_0^1 g_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$; donc $F(1) = \int_0^1 g = \left[\ln(1+t)\right]_0^1 = \ln 2$.

3. $\forall n \geq 1, \forall x \geq 2, \left| \frac{(-1)^{n-1}}{n^x} \right| \leq \frac{1}{n^2}$. Comme la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ est indépendante de n et convergente, la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ converge normalement sur $[2, +\infty[$.

Donc son reste $R_n(x) = \sum_{n \geq N+1} \frac{1}{n^x}$ tend vers 0 et pour N assez grand $|R_N| \leq \varepsilon/2$.

4. Par ailleurs, $|F(x) - 1| \leq \sum_{n=2}^N \frac{1}{n^x} + \sum_{n \geq N+1} \frac{1}{n^x}$. Lorsque x tend vers $+\infty$, la somme (finie) $\sum_{n=2}^N \frac{1}{n^x}$ tend vers 0 par opérations sur les limites car $\frac{1}{n^x} \rightarrow 0$ pour $n \geq 2$. Il existe donc $A > 0$ tel que pour tout $x > A$, $\sum_{n=2}^N \frac{1}{n^x} \leq \varepsilon/2$.

Finalement, pour $x > A$, $|F(x) - 1| \leq \varepsilon$ donc F tend vers 1 lorsque x tend vers $+\infty$.

5. Lien avec ζ

Pour $x > 1$, $F(x) - \zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} - 1}{n^x} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{-2}{(2k)^x} = -2^{1-x} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^x} = -2^{1-x} \zeta(x)$. On en déduit l'égalité : $F(x) = (1 - 2^{1-x}) \zeta(x)$.

6. Comme $2^{1-x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$, $F(x) \sim \zeta(x)$ au voisinage de $+\infty$ et donc $\zeta(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$.

7. Dérivabilité de F

a. Soit $x > 0$. La fonction $h_x : t \mapsto \frac{\ln t}{t^x}$ est de classe \mathcal{C}^∞ sur $]0, +\infty[$ et $h'_x(t) = \frac{t^{x-1}(1-x \ln t)}{t^{2x}}$.

Donc h'_x est négative sur l'intervalle $[e^{1/x}, +\infty[$ et positive sur $]0, e^{1/x}]$. Donc h_x est décroissante sur $[e^{1/x}, +\infty[$ et croissante sur $]0, e^{1/x}]$.

On en déduit que la suite $\left(\frac{\ln n}{n^x}\right)_{n \geq 1}$ est décroissante à partir du rang $[e^{1/x}] + 1$ qui est un entier supérieur ou égal à $e^{1/x}$.

b. $f_n : x \mapsto (-1)^{n-1} e^{-x \ln n}$ est de classe \mathcal{C}^1 et $f'_n(x) = (-1)^n \frac{\ln n}{n^x}$.

Soit $a > 0$. On pose $N_a = [e^{1/a}] + 1$. Pour tout $x \geq a$, la suite $\left(\frac{\ln n}{n^x}\right)_{n \geq N_a}$ tend vers 0 en décroissant; donc la série alternée $\sum_{n \geq N_a} f'_n(x)$ converge et, pour $n \geq N_a$, son reste d'ordre n ,

$\rho_n(x)$, vérifie :

$$|\rho_n(x)| \leq \left| (-1)^{n+1} \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^x} \right| \leq \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^a}.$$

Donc $\sup_{x \geq a} |\rho_n(x)| \leq \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^a} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Donc la série $\sum_{n \geq 1} f'_n$ converge uniformément sur $[a, +\infty[$.

- Pour tout $n \geq 1$, la fonction f_n est de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, +\infty[$;
- la série $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge simplement sur $]0, +\infty[$ et sa somme est F ;
- la série $\sum_{n \geq 1} f'_n$ converge uniformément sur tout segment inclus dans $]0, +\infty[$.

D'après le théorème de dérivation terme à terme, F est de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, +\infty[$ et

$$\forall x > 0, F'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n^x}.$$

II. Produit de Cauchy de la série alternée par elle-même

8. Étude de la convergence

a. Lorsque $x > 1$, la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ converge absolument ; d'après le théorème du produit de

Cauchy (ou somme en diagonales), la série produit de $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ par elle-même converge

absolument et sa somme vaut : $\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x} \right)^2 = (F(x))^2$.

b. Pour $x > 0$, $c_n(x) = (-1)^{n-2} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{[k(n-k)]^x}$. Comme $k \mapsto k(n-k)$ est maximum quand $k = \frac{n}{2}$ et que la somme comporte $n-1$ termes, $|c_n(x)| = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{[k(n-k)]^x} \geq (n-1) \frac{1}{[(n/2)^2]^x} = \frac{(n-1)4^x}{n^{2x}}$.

Pour $0 < x \leq \frac{1}{2}$, $\frac{(n-1)4^x}{n^{2x}}$ a une limite strictement positive (finie ou non), donc la suite $(c_n(x))$ ne converge pas vers 0. Donc la série $\sum_{n \geq 2} c_n(x)$ diverge grossièrement.

9. Cas où $x = 1$

a. $\frac{1}{[X](n-[X])} = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{[X]} + \frac{1}{n-[X]} \right)$. Donc

$$\begin{aligned} c_n(1) &= (-1)^{n-2} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k(n-k)} = (-1)^{n-2} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{n-k} \right) = (-1)^{n-2} \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n-k} \right) \\ &= 2(-1)^{n-2} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} = 2(-1)^{n-2} \frac{H_{n-1}}{n}. \end{aligned}$$

b. Monotonie

$$\begin{aligned} \frac{H_{n-1}}{n} - \frac{H_n}{n+1} &= \frac{1}{n} \left(H_n - \frac{1}{n} \right) - \frac{H_n}{n+1} = H_n \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) - \frac{1}{n^2} \\ &\geq \left(1 + \frac{1}{2} \right) \frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{n^2} = \frac{n-2}{2n^2(n+1)} \geq 0. \end{aligned}$$

Donc la suite $\left(\frac{H_{n-1}}{n} \right)_{n \geq 2}$ est décroissante.

- c. Par comparaison séries/intégrales avec la fonction $t \mapsto 1/t$, on peut établir le résultat classique : $H_n \sim \ln n$ au voisinage de $+\infty$. Donc la suite $\left(\frac{H_{n-1}}{n}\right)_{n \geq 2}$ converge vers 0 en décroissant et la série alternée $\sum_{n \geq 2} c_n(1)$ converge.

III. Calcul de la somme d'une série à l'aide d'une étude de ζ au voisinage de 1

10. Développement asymptotique en 1

- a. On pose $h = x - 1$. Comme F est dérivable en 1, au voisinage de 1, on a :

$$F(x) = F(1) + hF'(1) + o(h) = \ln 2 + hF'(1) + o(h).$$

On a aussi : $1 - 2^{1-x} = 1 - e^{-h \ln 2} = h \ln 2 - \frac{\ln^2 2}{2} h^2 + o(h^2)$ au voisinage de $x = 1$.

- b. Développement de ζ

$$\begin{aligned} \zeta(x) &= \frac{F(x)}{1 - 2^{1-x}} = \frac{\ln 2 + hF'(1) + o(h)}{h \ln 2 - \frac{\ln^2 2}{2} h^2 + o(h^2)} = \frac{1}{h \ln 2} \frac{\ln 2 + hF'(1) + o(h)}{1 - \frac{\ln 2}{2} h + o(h)} \\ &= \frac{1}{h \ln 2} (\ln 2 + hF'(1) + o(h)) \left(1 + \frac{\ln 2}{2} h + o(h)\right) = \frac{1}{h \ln 2} \left(\ln 2 + h \left(F'(1) + \frac{\ln^2 2}{2}\right) + o(h)\right) \\ &= \frac{1}{h} + \left(\frac{F'(1)}{\ln 2} + \frac{\ln 2}{2}\right) + o(1) \end{aligned}$$

11. Développement asymptotique en 1 (bis)

- a. Pour $n \geq 1$ et $x \in [1, 2]$, $t \mapsto \frac{1}{t^x}$ est décroissante sur $[n, n+1]$ (qui est un intervalle de longueur 1), donc $1 \cdot \frac{1}{(n+1)^x} \leq \int_n^{n+1} \frac{dt}{t^x} \leq 1 \cdot \frac{1}{n^x}$. On en déduit que : $0 \leq v_n(x) \leq \frac{1}{n^x} - \frac{1}{(n+1)^x}$.
- b. Pour $x \in [1, 2]$, la suite $\left(\frac{1}{n^x}\right)_{n \geq 1}$ converge (vers 0); comme $\sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k^x} - \frac{1}{(k+1)^x}\right) = 1 - \frac{1}{(n+1)^x}$, la série $\sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{n^x} - \frac{1}{(n+1)^x}\right)$ converge. De l'encadrement du (a), on déduit la convergence de la série $\sum_{n \geq 1} v_n(x)$.
- c. Pour $x \in]1, 2]$, $\sum_{k=1}^n v_k(x) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^x} - \int_1^{n+1} \frac{dt}{t^x} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \zeta(x) - \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^x} = \zeta(x) - \frac{1}{x-1}$.
- d. La série $\sum_{n \geq 1} v_n$ converge simplement sur $[1, 2]$. On note $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k(x)$ le reste d'ordre n de la série. D'après (a), $0 \leq R_n(x) \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k^x} - \frac{1}{(k+1)^x}\right) = \frac{1}{(n+1)^x} - \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{k^x} = \frac{1}{(n+1)^x}$. Donc $\sup_{x \in [1, 2]} |R_n(x)| \leq \frac{1}{(n+1)^x} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Donc la série $\sum_{n \geq 1} v_n$ converge uniformément sur $[1, 2]$.
- e. Pour $x \in]1, 2]$, $v_n(x) = \frac{1}{n^x} - \frac{1}{1-x} \left(\frac{1}{n^{x-1}} - \frac{1}{(n+1)^{x-1}}\right)$; $v_n(1) = \frac{1}{n} - \ln(n+1) + \ln n$. v_n est continue, sauf peut-être en 1. En 1 : en posant $h = x - 1$, $\frac{1}{n^x} = \frac{1}{n} + o(1)$ par continuité de l'exponentielle $x \mapsto n^{-x}$ en 1 et $\frac{1}{1-x} \left(\frac{1}{n^{x-1}} - \frac{1}{(n+1)^{x-1}}\right) = \frac{1}{h} (e^{-h \ln n} - e^{-h \ln(n+1)}) = \frac{1}{h} ((1 - h \ln n + o(h)) - (1 - h \ln(n+1) + o(h))) = \ln(n+1) - \ln n + o(1)$; donc $v_n(x) = \frac{1}{n} + \ln(n+1) - \ln n + o(1)$. Donc v_n est continue en 1.

On en déduit que la série $\sum_{n \geq 1} v_n$ est une série de fonctions continues sur $[1, 2]$. La convergence uniforme sur $[1, 2]$ entraîne donc la continuité de sa somme sur $[1, 2]$.

On en déduit que $\zeta(x) - \frac{1}{x-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} v_n(x) = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} v_n(1) \right) + o(1) = \gamma + o(1)$ au voisinage de 1^+ . D'où $\zeta(x) = \frac{1}{x-1} + \gamma + o(1)$ au voisinage de 1^+ .

12. Application

Par unicité du développement limité en 1^+ (éventuellement en multipliant par $(x-1)$), on déduit de 8.(b) et 9.(e) les égalités $a = 1$ et $\frac{F'(1)}{\ln 2} + \frac{\ln 2}{2} = b = \gamma$. D'où $F'(1) = \ln 2 \left(\gamma - \frac{\ln 2}{2} \right)$.

D'après I.4.(b), $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} \ln n}{n} = -F'(1) = \ln 2 \left(\frac{\ln 2}{2} - \gamma \right)$.

IV. Calcul de $\zeta(4)$ et application à la physique :

Pour $x > 1$, on pose $\zeta(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^x}$. On rappelle (et on admet) que $\zeta(2) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Pour $m \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $\phi(m, n) = \frac{2}{mn^3} + \frac{1}{m^2n^2} + \frac{2}{m^3n}$.

13. a. Soit

$$\sum_{m \geq 1} \sum_{n \geq 1} \phi(m, n) - \sum_{m \geq 1} \sum_{n \geq 1} \phi(m, n+m) - \sum_{m \geq 1} \sum_{n \geq 1} \phi(m+n, n).$$

D'une part, on peut vérifier que $\phi(m, n) - \phi(m, n+m) - \phi(m+n, n) = \frac{2}{m^2n^2}$.

Alors

$$\begin{aligned} \sum_{m \geq 1} \sum_{n \geq 1} \phi(m, n) - \sum_{m \geq 1} \sum_{n \geq 1} \phi(m, n+m) - \sum_{m \geq 1} \sum_{n \geq 1} \phi(m+n, n) &= \sum_{m \geq 1, n \geq 1} \frac{2}{m^2n^2} \\ &= \sum_{m \geq 1} \left(\sum_{n \geq 1} \frac{2}{m^2n^2} \right) = \sum_{m \geq 1} \frac{2}{m^2} \left(\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} \right) \\ &= 2 \left(\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} \right) \left(\sum_{m \geq 1} \frac{1}{m^2} \right) = 2\zeta(2)^2. \end{aligned}$$

Par ailleurs :

La première série correspond à la somme de tous les termes $\phi(a, b)$ pour $(a, b) \in (\mathbb{N}^*)^2$ (plan supérieur droit).

La seconde série correspond à la somme des termes $\phi(a, b)$ tels que $(a < b)$ situés strictement au dessus de la diagonale du quart de plan.

La troisième série correspond à la somme des termes $\phi(a, b)$ tels que $(a > b)$ situés strictement en dessous de la diagonale du quart de plan.

Finalement, l'ensemble correspond à la somme des termes $\phi(a, b)$ tels que $a = b$ (la diagonale du plan), c'est à dire $\sum_{a \in \mathbb{N}} \phi(a, a) = \sum_{n \geq 1} \frac{5}{a^4} = 5 \cdot \zeta(4)$.

b. Donc $5\zeta(4) = 2\zeta(2)^2 = 2 \frac{\pi^4}{36}$ et on peut alors en déduire que

$$\zeta(4) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

14. Déterminer, après avoir justifié son existence, et en détaillant les calculs l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{t^3}{e^t - 1} dt$

Pour $t > 0$, comme $0 \leq \exp(-t) < 1$, on a $\frac{t^3}{e^t - 1} = t^3 e^{-t} \frac{1}{1 - e^{-t}} = t^3 \sum_{n \in \mathbb{N}} e^{-(n+1)t} = \sum f_n(t)$.

Chaque f_n est continue sur $]0, +\infty[$, positives et intégrable car faussement impropre en 0 et $o(1/t^2)$ en $+\infty$. La série de fonction converge simplement vers f qui est continue et intégrable.

Pour $n \in \mathbb{N}$, $\int |f_n| = \frac{1}{(n+1)^4} \int_0^{+\infty} u^3 \exp(-u) du$ en posant $u = (n+1)t$ changement de variables bijectif.

Par IPP ou en reconnaissant la fonction Γ , on a finalement $\int |f_n| = \frac{6}{(n+1)^4}$ qui est le terme général d'une série convergente par critère de Riemann.

Donc par intégration terme à terme de Beppo-Levi, $\int f = \sum_{n \geq 0} \frac{6}{(n+1)^4} = 6\zeta(4) = \frac{\pi^4}{15}$.

15. Soit $M = \frac{c}{4} \int_0^{+\infty} \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \frac{1}{\exp(\frac{hc}{k_B \lambda T}) - 1} d\lambda$.

On pose $t = \varphi(\lambda) = \frac{hc}{k_B \lambda T}$ changement de variables bijectif.

Alors $\lambda = \frac{hc}{k_B t T}$ et $d\lambda = \frac{-hc}{k_B t^2 T} dt$

Et $M = \int_{+\infty}^0 2\pi hc^2 \frac{k_B^5 t^5 T^5}{h^5 c^5} \frac{(-hc)}{k_B t^2 T} \frac{1}{\exp(t) - 1} dt = \int_0^{+\infty} 2\pi hc^2 \frac{k_B^5 t^5 T^5}{h^5 c^5} \frac{hc}{k_B t^2 T} \frac{1}{\exp(t) - 1} dt$

Après simplifications et d'après l'intégrale calculée la question précédente,

$$\dots = \frac{2\pi k_B^4 T^4}{h^3 c^2} \frac{\pi^4}{15} = \sigma T^4$$

avec $\sigma = \frac{2\pi^5 k_B^4}{15 h^3 c^2}$.