

Pour le lundi 10 février 2020

Traiter l'exercice 1 et au moins la partie 1 du problème

### Exercice :

1. Établir

$$\int_0^1 \frac{\arctan t}{t} dt = - \int_0^1 \frac{\ln t}{1+t^2} dt.$$

2. En déduire que

$$\int_0^1 \frac{\arctan t}{t} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$$

3. Retrouver ce résultat en admettant que

$$\forall t \in ]-1, 1[, \arctan(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} t^{2n+1}.$$

### Problème : autour de la fonction zeta alternée de Riemann

On rappelle quelques points du dernier chapitre :

Soient  $I \subset \mathbb{R}$  non vide,  $(f_n)$  une suite de fonctions de  $I$  dans  $\mathbb{R}$  et  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ . On dit que :

- la suite  $(f_n)$  converge SIMPLEMENT vers la fonction  $f$  si  $\forall x \in I, f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f(x)$ ;
- la suite  $(f_n)$  converge UNIFORMÉMENT vers la fonction  $f$  sur  $I$  si à partir d'un certain rang, chaque fonction  $f_n - f$  est bornée sur  $I$  et  $\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ .
- la série  $\sum f_n$  converge SIMPLEMENT vers la fonction  $f$  sur  $I$  si  $\forall x \in I, \sum_n f_n(x) = f(x)$ ;
- la série  $\sum f_n$  converge UNIFORMÉMENT vers la fonction  $f$  si le reste de la série  $(\sum_{n=N}^{+\infty} f_n)$  converge uniformément vers 0;

**Objectifs :**

On note  $F$  la fonction zeta alternée de Riemann, définie par  $F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ ,

et  $\zeta$  la fonction zeta de Riemann, définie sur  $]1, +\infty[$  par  $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ .

Ce problème propose une étude croisée de quelques propriétés de  $F$  et  $\zeta$ .

#### I. Généralités

1. Déterminer rigoureusement l'ensemble de définition de la fonction  $F : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ .

2. On considère la suite de fonctions  $(g_n)_{n \geq 1}$  définies sur  $]0, 1[$  par

$$g_n(t) = \sum_{k=0}^n (-t)^k.$$

Déterminer la limite simple  $g$  de  $(g_n)$  puis, en utilisant le théorème de convergence dominée, montrer que  $F(1) = \int_0^1 g(t) dt$ . En déduire la valeur de  $F(1)$ .

3. Soit  $\varepsilon > 0$ . Montrer qu'il existe  $N \in \mathbb{N}^*$  tel que

$$\forall x \geq 2, \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

4. En déduire que  $F$  admet une limite en  $+\infty$  et déterminer cette limite.

5. *Lien avec  $\zeta$*  : En étudiant pour  $x > 1$ ,  $F(x) - \zeta(x)$ , montrer que :

$$F(x) = (1 - 2^{1-x})\zeta(x).$$

6. En déduire que  $\zeta$  admet une limite en  $+\infty$  et déterminer cette limite.

7. *Dérivabilité de  $F$*

a. Soit  $x > 0$ . Étudier les variations sur  $]0, +\infty[$  de la fonction  $t \mapsto \frac{\ln t}{t^x}$  et en déduire que la suite  $\left(\frac{\ln n}{n^x}\right)_{n \geq 1}$  est monotone à partir d'un certain rang (dépendant de  $x$ ) que l'on précisera.

b. Pour  $n \geq 1$ , on pose  $f_n : x \mapsto \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ .

i. Si  $a$  est un réel strictement positif, démontrer que pour tout  $x \geq a$ , la série  $\sum f'_n(x)$  est convergente.

ii. On note son reste  $R_{n,f'}(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f'_k(x)$ . Montrer qu'il existe un rang  $N$  tel que

$$\forall n \geq N, \forall x \geq a, |R_{n,f'}(x)| \leq \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^a}.$$

iii. En déduire que  $\sum f'_n$  converge uniformément sur  $[a, +\infty[$

8. Montrer que la fonction  $F$  est une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $]0, +\infty[$ .

## II. Produit de Cauchy de la série alternée par elle-même

On pose pour  $n \geq 1$ ,  $a_n(x) = \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$  et pour  $n \geq 2$ ,  $c_n(x) = \sum_{k=1}^{n-1} a_k(x)a_{n-k}(x)$ . Dans cette partie, on veut déterminer la nature, selon la valeur de  $x$ , de la série  $\sum c_n(x)$ ,

Dans toute cette partie,  $n$  désigne un entier supérieur ou égal à 2 et  $x$  un réel strictement positif.

8. *Étude de la convergence*

a. Indiquer sans aucun calcul la nature et la somme, en fonction de  $F$ , de la série  $\sum c_n(x)$  lorsque  $x > 1$ .

b. Démontrer que, pour  $x > 0$ ,  $|c_n(x)| \geq \frac{4^x(n-1)}{n^{2x}}$ .

En déduire, pour  $0 < x \leq \frac{1}{2}$ , la nature de la série  $\sum c_n(x)$ .

9. *Cas où  $x = 1$*  : on suppose, dans cette question 9., que  $x = 1$ .

a. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle  $\frac{1}{X(n-X)}$ .

En déduire une expression de  $c_n(x)$  en fonction de  $\frac{H_{n-1}}{n}$ , où  $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$  (somme partielle de la série harmonique).

b. Étudier la monotonie de la suite  $\left(\frac{H_{n-1}}{n}\right)_{n \geq 2}$ .

c. En déduire la nature de la série  $\sum c_n(x)$ .

III. **Calcul de la somme d'une série à l'aide d'une étude de  $\zeta$  au voisinage de 1**

On rappelle que la fonction  $F$  est de classe  $C^1$  sur son domaine de définition.

10. *Développement asymptotique en 1*

a. Écrire en fonction de  $\ln 2$  et de  $F'(1)$  le développement limité à l'ordre 1 et au voisinage de 1 de la fonction  $F$ , puis déterminer le développement limité à l'ordre 2 et au voisinage de 1 de la fonction  $x \mapsto 1 - 2^{1-x}$ .

b. En déduire deux réels  $a$  et  $b$ , qui s'écrivent éventuellement à l'aide de  $\ln 2$  et  $F'(1)$ , tels que l'on ait, pour  $x$  au voisinage de  $1^+$  :

$$\zeta(x) = \frac{a}{x-1} + b + o(1).$$

11. *Développement asymptotique en 1 (bis)* : on considère la série de fonctions  $\sum v_n$ , où  $v_n$  est définie sur  $[1, 2]$  pour  $n \geq 1$  par

$$v_n(x) = \frac{1}{n^x} - \int_n^{n+1} \frac{dt}{t^x}.$$

a. Justifier que, pour  $n \geq 1$  et  $x \in [1, 2]$ , on a :  $0 \leq v_n(x) \leq \frac{1}{n^x} - \frac{1}{(n+1)^x}$ .

b. Justifier que, pour  $x \in [1, 2]$ , la série  $\sum v_n(x)$  converge. On note alors  $\gamma = \sum_{n=1}^{+\infty} v_n(1)$  (c'est la constante d'Euler).

c. Exprimer, pour  $x \in ]1, 2]$ , la somme  $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n(x)$  à l'aide de  $\zeta(x)$  et  $1-x$ .

d. Démontrer que la série de fonctions  $\sum v_n$  converge uniformément sur  $[1, 2]$

e. En déduire que l'on a, pour  $x$  au voisinage de  $1^+$  :

$$\zeta(x) = \frac{1}{x-1} + \gamma + o(1).$$

12. *Application*

Déduire des résultats précédents une expression, à l'aide de  $\ln 2$  et  $\gamma$ , de la somme

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} \ln n}{n}.$$

#### IV. Calcul de $\zeta(4)$ et application à la physique :

Pour  $x > 1$ , on pose  $\zeta(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^x}$ . On rappelle (et on admet) que  $\zeta(2) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ .

Pour  $m \in \mathbb{N}^*$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose :  $\phi(m, n) = \frac{2}{mn^3} + \frac{1}{m^2n^2} + \frac{2}{m^3n}$ .

**13. a.** Montrer que

$$\sum_{m \geq 1} \sum_{n \geq 1} \phi(m, n) - \sum_{m \geq 1} \sum_{n \geq 1} \phi(m, n+m) - \sum_{m \geq 1} \sum_{n \geq 1} \phi(m+n, n) = 2\zeta(2)^2.$$

et que

$$\sum_{m \geq 1} \sum_{n \geq 1} \phi(m, n) - \sum_{m \geq 1} \sum_{n \geq 1} \phi(m, n+m) - \sum_{m \geq 1} \sum_{n \geq 1} \phi(m+n, n) = \sum_{n \geq 1} \phi(n, n).$$

**b.** En déduire que

$$\zeta(4) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

**14.** Déterminer, après avoir justifié son existence, et en détaillant les calculs l'intégrale  $\int_0^{+\infty} \frac{t^3}{e^t - 1} dt$

Cette intégrale intervient notamment dans la théorie du rayonnement du corps noir.

La loi de Planck donne l'expression de la densité spectrale d'énergie électromagnétique  $u_\lambda$  rayonnée par le corps noir, en fonction de la longueur d'onde par la formule :

$$u_\lambda = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \frac{1}{\exp\left(\frac{hc}{k_B \lambda T}\right) - 1}$$

où  $h$  et  $k_B$  sont les constantes de Planck et de Boltzmann,  $c$  la célérité de la lumière dans le vide,  $\lambda$  la longueur d'onde et  $T$  la température.

Ainsi, la densité volumique totale d'énergie électromagnétique  $u$  (rayonnée sur tout le spectre des longueurs d'onde) s'écrit :  $u = \int_0^{+\infty} u_\lambda d\lambda$

Si on note  $M$  l'exitance totale d'un corps noir on sait que  $M$  et  $u$  sont liés par la relation  $M = \frac{c}{4}u$

**15.** Démontrer la loi de Stefan du rayonnement du corps noir :

$$M = \sigma T^4 \text{ où } \sigma = \frac{2\pi^5 (k_B)^4}{15h^3 c^2}.$$