DS 5 : 4h

Vendredi 22 décembre 2017
L'usage des calculatrices n'est pas autorisé

Consignes à respecter sous peine d'être pénalisé :
• Changer de copie (ou au moins de feuille) à chaque exercice ou partie d'un problème.
• Numéroter les questions (et le cas échéant la partie).
• Souligner les résultats intermédiaires dans une démonstration à tiroirs, faire une phrase de conclusion et encadrer le résultat.

Exercice :

Montrer que la série double $\sum_p \sum_q a_{p,q}$ où $a_{p,q} = \dfrac{1}{(p+q+1)} \cdot \dfrac{1}{2^{p+q}}$ pour $(p,q) \in \mathbb{N}^2$ est convergente et calculer sa somme.

Exercice :

1. Établir
$$\int_0^1 \frac{\arctan t}{t}\,\mathrm{d}t = -\int_0^1 \frac{\ln t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

2. En déduire que
$$\int_0^1 \frac{\arctan t}{t}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$$

3. Retrouver ce résultat en admettant que
$$\forall t \in \mathbb{R}, \arctan(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n+1} t^{2n+1}.$$

Problème : autour de la fonction zeta alternée de Riemann

On rappelle quelques points du dernier chapitre :
Soient $I \subset \mathbb{R}$ non vide, (f_n) une suite de fonctions de I dans $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$. On dit que :
— la suite (f_n) converge SIMPLEMENT vers la fonction f si $\forall\, x \in I$, $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x)$;
— la suite (f_n) converge UNIFORMÉMENT vers la fonction f sur I si à partir d'un certain rang, chaque fonction $f_n - f$ est bornée sur I et $\|f_n - f\|_\infty \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.
— la série $\sum f_n$ converge SIMPLEMENT vers la fonction f sur I si $\forall\, x \in I$, $\sum_n f_n(x) = f(x)$;
— la série $\sum f_n$ converge UNIFORMÉMENT vers la fonction f si le reste de la série $(\sum_{n=N}^{+\infty} f_n)$ converge uniformément vers 0 ;

Objectifs :

On note F la fonction zeta alternée de Riemann, définie par $F(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$,

et ζ la fonction zeta de Riemann, définie sur $]1,+\infty[$ par $\zeta(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$.

Ce problème propose une étude croisée de quelques propriétés de F et ζ.

I. Généralités

1. Déterminer rigoureusement l'ensemble de définition de la fonction $F : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$.

2. On considère la suite de fonctions $(g_n)_{n\geq 1}$ définies sur $[0,1[$ par

$$g_n(t) = \sum_{k=0}^{n} (-t)^k.$$

Déterminer la limite simple g de (g_n) puis, en utilisant le théorème de convergence dominée, montrer que $F(1) = \displaystyle\int_0^1 g(t)\ \mathrm{d}t$. En déduire la valeur de $F(1)$.

3. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\forall x \geq 2, \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

4. En déduire que F admet une limite en $+\infty$ et déterminer cette limite.

5. *Lien avec ζ :* En étudiant pour $x > 1$, $F(x) - \zeta(x)$, montrer que :

$$F(x) = (1 - 2^{1-x})\zeta(x).$$

6. En déduire que ζ admet une limite en $+\infty$ et déterminer cette limite.

7. *Dérivabilité de F*

a. Soit $x > 0$. Étudier les variations sur $]0, +\infty[$ de la fonction $t \mapsto \dfrac{\ln t}{t^x}$ et en déduire que la suite $\left(\dfrac{\ln n}{n^x}\right)_{n\geq 1}$ est monotone à partir d'un certain rang (dépendant de x) que l'on précisera.

b. Pour $n \geq 1$, on pose $f_n : x \mapsto \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^x}$.

i. Si a est un réel strictement positif, démontrer que pour tout $x \geq a$, la série $\sum f_n'(x)$ est convergente.

ii. On note son reste $R_{n,f'}(x) = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k'(x)$. Montrer qu'il existe un rang N tel que

$$\forall n \geq N, \forall x \geq a, |R_{n,f'}(x)| \leq \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^a}.$$

iii. En déduire que $\sum f_n'$ converge uniformément sur $[a, +\infty[$

On admet alors que par théorème de dérivation terme à terme pour une convergence uniforme locale de séries de fonctions, la fonction F est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.

II. Produit de Cauchy de la série alternée par elle-même

On pose pour $n \geq 1$, $a_n(x) = \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ et pour $n \geq 2$, $c_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} a_k(x) a_{n-k}(x)$. Dans cette partie, on veut déterminer la nature, selon la valeur de x, de la série $\sum c_n(x)$,
Dans toute cette partie, n désigne un entier supérieur ou égal à 2 et x un réel strictement positif.

8. *Étude de la convergence*

a. Indiquer sans aucun calcul la nature et la somme, en fonction de F, de la série $\sum c_n(x)$ lorsque $x > 1$.

b. Démontrer que, pour $x > 0$, $|c_n(x)| \geq \dfrac{4^x(n-1)}{n^{2x}}$.

En déduire, pour $0 < x \leq \dfrac{1}{2}$, la nature de la série $\sum c_n(x)$.

9. *Cas où $x = 1$:* on suppose, dans cette question 9., que $x = 1$.

a. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle $\dfrac{1}{X(n-X)}$.

En déduire une expression de $c_n(x)$ en fonction de $\dfrac{H_{n-1}}{n}$, où $H_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n}$ (somme partielle de la série harmonique).

b. Étudier la monotonie de la suite $\left(\dfrac{H_{n-1}}{n}\right)_{n\geq 2}$.

c. En déduire la nature de la série $\sum c_n(x)$.

III. Calcul de la somme d'une série à l'aide d'une étude de ζ au voisinage de 1

On rappelle que la fonction F est de classe C^1 sur son domaine de définition.

10. *Développement asymptotique en 1*

a. Écrire en fonction de $\ln 2$ et de $F'(1)$ le développement limité à l'ordre 1 et au voisinage de 1 de la fonction F, puis déterminer le développement limité à l'ordre 2 et au voisinage de 1 de la fonction $x \mapsto 1 - 2^{1-x}$.

b. En déduire deux réels a et b, qui s'écrivent éventuellement à l'aide de $\ln 2$ et $F'(1)$, tels que l'on ait, pour x au voisinage de 1^+ :

$$\zeta(x) = \frac{a}{x-1} + b + o(1).$$

11. *Développement asymptotique en 1 (bis) :* on considère la série de fonctions $\sum v_n$, où v_n est définie sur $[1,2]$ pour $n \geq 1$ par

$$v_n(x) = \frac{1}{n^x} - \int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^x}.$$

a. Justifier que, pour $n \geq 1$ et $x \in [1,2]$, on a : $0 \leq v_n(x) \leq \dfrac{1}{n^x} - \dfrac{1}{(n+1)^x}$.

b. Justifier que, pour $x \in [1,2]$, la série $\sum v_n(x)$ converge. On note alors $\gamma = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} v_n(1)$ (c'est la constante d'Euler).

c. Exprimer, pour $x \in]1,2]$, la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} v_n(x)$ à l'aide de $\zeta(x)$ et $1-x$.

d. Démontrer que la série de fonctions $\sum v_n$ converge uniformément sur $[1,2]$

e. En déduire que l'on a, pour x au voisinage de 1^+ :

$$\zeta(x) = \frac{1}{x-1} + \gamma + o(1).$$

12. *Application*

Déduire des résultats précédents une expression, à l'aide de $\ln 2$ et γ, de la somme

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}\ln n}{n}.$$

IV. Calcul de $\zeta(4)$ et application à la physique :

Pour $x > 1$, on pose $\zeta(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^x}$. On rappelle (et on admet) que $\zeta(2) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Pour $m \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $\phi(m,n) = \frac{2}{mn^3} + \frac{1}{m^2n^2} + \frac{2}{m^3n}$.

13. a. Montrer que

$$\sum_{m\geq 1}\sum_{n\geq 1}\phi(m,n) - \sum_{m\geq 1}\sum_{n\geq 1}\phi(m,n+m) - \sum_{m\geq 1}\sum_{n\geq 1}\phi(m+n,n) = 2\zeta(2)^2.$$

et que

$$\sum_{m\geq 1}\sum_{n\geq 1}\phi(m,n) - \sum_{m\geq 1}\sum_{n\geq 1}\phi(m,n+m) - \sum_{m\geq 1}\sum_{n\geq 1}\phi(m+n,n) = \sum_{n\geq 1}\phi(n,n).$$

b. En déduire que

$$\zeta(4) = \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

14. Déterminer, après avoir justifié son existence, et en détaillant les calculs l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{t^3}{\mathrm{e}^t - 1}\,\mathrm{d}t$

Cette intégrale intervient notamment dans la théorie du rayonnement du corps noir.
La loi de Planck donne l'expression de la densité spectrale d'énergie électromagnétique u_λ rayonnée par le corps noir, en fonction de la longueur d'onde par la formule :

$$u_\lambda = \frac{8\pi hc}{\lambda^5}\frac{1}{\exp\left(\frac{hc}{k_B\lambda T}\right) - 1}$$

où h et k_B sont les constantes de Planck et de Boltzmann, c la célérité de la lumière dans le vide, λ la longueur d'onde et T la température.
Ainsi, la densité volumique totale d'énergie électromagnétique u (rayonnée sur tout le spectre des longueurs d'onde) s'écrit : $u = \int_0^{+\infty} u_\lambda\,\mathrm{d}\lambda$

Si on note M l'exitance totale d'un corps noir on sait que M et u sont liés par la relation $M = \frac{c}{4}u$

15. Démontrer la loi de Stefan du rayonnement du corps noir :

$$M = \sigma T^4 \text{ où } \sigma = \frac{2\pi^5(k_B)^4}{15h^3c^2}.$$

DS 5 : 4h

Vendredi 22 décembre 2017
L'usage des calculatrices n'est pas autorisé

Consignes à respecter sous peine d'être pénalisé :
• Changer de copie (ou au moins de feuille) à chaque exercice ou partie d'un problème.
• Numéroter les questions (et le cas échéant la partie).
• Souligner les résultats intermédiaires dans une démonstration à tiroirs, faire une phrase de conclusion et encadrer le résultat.

Exercice 1

1. Justifier rapidement mais proprement que la série $\sum \frac{1}{2^n}$ est convergente.

2. En déduire que la série double $\sum_p \sum_q a_{p,q}$ où $a_{p,q} = \dfrac{1}{(p+q+1)} \cdot \dfrac{1}{2^{p+q}}$ pour $(p,q) \in \mathbb{N}^2$ est convergente.

3. Rappeler l'énoncé de la somme en diagonale pour une série double (on précisera les hypothèses).

4. Calculer la valeur de $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty}\sum_{q=0}^{+\infty} \frac{1}{(p+q+1)} \cdot \frac{1}{2^{p+q}}$ en sommant en diagonale ($p+q=n$).

Exercice 2

1. À l'aide d'une intégration par parties généralisée à justifier, établir

$$\int_0^1 \frac{\arctan t}{t}\,\mathrm{d}t = -\int_0^1 \frac{\ln t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

2. À l'aide d'un développement en série entière de $\dfrac{1}{1+t^2}$ pour $t \in [0,1[$, et en justifiant l'utilisation du théorème d'intégration terme à terme de Beppo Levi, en déduire que

$$\int_0^1 \frac{\arctan t}{t}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$$

Problème : autour de la fonction zeta alternée de Riemann

Objectifs :

On note F la fonction zeta alternée de Riemann, définie par $F(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$,

et ζ la fonction zeta de Riemann, définie sur $]1,+\infty[$ par $\zeta(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$.

Ce problème propose une étude croisée de quelques propriétés de F et ζ.

I. Généralités

1. **a.** Vérifier que pour $x \leq 0$, la suite de terme général $\dfrac{1}{n^x}$ ne tend pas vers 0.

b. Vérifier que pour $x > 0$, la série $\sum \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ est une série alternée.

c. En déduire que l'ensemble de définition de la fonction F est $\mathbb{R}_+^*$.

2. On considère la suite de fonctions $(g_n)_{n\geq 1}$ définies sur $[0,1[$ par $g_n(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-t)^k$.

a. Montrer que pour tout $t \in [0,1[$, $|g_n(t)| \leq \dfrac{2}{1+t}$.

b. En utilisant le théorème de convergence dominée, montrer que $F(1) = \displaystyle\int_0^1 \lim_{n\to+\infty} g_n(t)\ \mathrm{d}t$.

En déduire que $F(1) = \ln 2$.

3. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall x \geq 2$, $\displaystyle\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} < \frac{\varepsilon}{2}$.

4. Justifier que $|F(x) - 1| \leq \left| \displaystyle\sum_{n=2}^{N} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x} \right| + \left| \displaystyle\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x} \right|$, et en déduire que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$.

5. *Lien avec ζ :*

a. Montrer que pour $x > 1$, $F(x) - \zeta(x) = -2^{1-x}\zeta(x)$

b. En déduire que la limite de ζ en $+\infty$ est finie et égale à 1.

6. *Dérivabilité de F*

a. Soit $x > 0$. Étudier les variations sur $]0,+\infty[$ de la fonction $t \mapsto \dfrac{\ln t}{t^x}$ et en déduire que la suite $\left(\dfrac{\ln n}{n^x}\right)_{n\geq 1}$ est décroissante à partir du rang $N_x = \lfloor \exp(1/x) \rfloor + 1$.

b. Pour $n \geq 1$, on pose $f_n : x \mapsto \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^x}$.

i. Si a est un réel strictement positif, en utilisant le critère spécial des séries alternées, montrer que pour tout $x \geq a$, la série $\sum f_n'(x)$ est convergente.

ii. On note son reste $R_{n,f'}(x) = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k'(x)$.

On note N_a le rang correspondant à la question **6.a**. Montrer que :

$$\forall n \geq N_a, \forall x \geq a, |R_{n,f'}(x)| \leq \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^a}.$$

On admet qu'on peut en déduire que $\sum f_n'$ converge uniformément sur $[a,+\infty[$ et que par théorème de dérivation terme à terme pour une convergence uniforme locale de séries de fonctions, la fonction F est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$.

II. Calcul de la somme d'une série à l'aide d'une étude de ζ au voisinage de 1

On admet que la fonction F est de classe C^1 sur son domaine de définition.

7. *Développement asymptotique en 1*

a. Écrire en fonction de $\ln 2$ et de $F'(1)$ le développement limité à l'ordre 1 et au voisinage de 1 de la fonction F,

b. Déterminer le développement limité à l'ordre 2 en 0 de $\psi(h) = 1 - 2^{-h}$.

c. En déduire que $1 - 2^{1-x} = (x-1)\ln 2 - \dfrac{\ln^2 2}{2}(x-1)^2 + o((x-1)^2)$ au voisinage de $x = 1$.

d. En déduire que pour x au voisinage de 1^+ :

$$\zeta(x) = \frac{1}{x-1} + (\frac{F'(1)}{\ln 2} + \frac{\ln 2}{2}) + o(1).$$

8. *Développement asymptotique en 1 (bis) :* on considère la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 1} v_n$, où v_n est définie sur $[1,2]$ par

$$v_n(x) = \frac{1}{n^x} - \int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^x}.$$

a. Justifier que, pour $n \geq 1$ et $x \in [1,2]$, on a :

$$0 \leq v_n(x) \leq \frac{1}{n^x} - \frac{1}{(n+1)^x}.$$

b. Justifier que, pour $x \in [1,2]$, la série $\sum\limits_{n\geq 1} v_n(x)$ converge.

On note alors $\gamma = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} v_n(1)$ (c'est la constante d'Euler).

c. Montrer que pour $x \in]1,2]$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} v_n(x) = \zeta(x) - \frac{1}{x-1}.$$

d. Démontrer que le reste R_n de la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 1} v_n$ vérifie

$$\forall x \in [1,2], 0 \leq R_n(x) \leq \frac{1}{(n+1)^x}.$$

On admet que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 1} v_n$ converge uniformément sur $[1,2]$, et que l'on a, pour x au voisinage de 1^+ :

$$\zeta(x) = \frac{1}{x-1} + \gamma + o(1).$$

9. *Application*

Déduire des résultats précédents une expression, à l'aide de $\ln 2$ et γ, de la somme

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}\ln n}{n}.$$

III. Calcul de $\zeta(4)$ et application à la physique :

Pour $x > 1$, on pose $\zeta(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^x}$. On rappelle (et on admet) que $\zeta(2) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Pour $m \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $\phi(m,n) = \frac{2}{mn^3} + \frac{1}{m^2n^2} + \frac{2}{m^3n}$.

10. a. Montrer que

$$\sum_{m\geq 1}\sum_{n\geq 1} \phi(m,n) - \sum_{m\geq 1}\sum_{n\geq 1} \phi(m,n+m) - \sum_{m\geq 1}\sum_{n\geq 1} \phi(m+n,n) = 2\zeta(2)^2.$$

et que

$$\sum_{m\geq 1}\sum_{n\geq 1} \phi(m,n) - \sum_{m\geq 1}\sum_{n\geq 1} \phi(m,n+m) - \sum_{m\geq 1}\sum_{n\geq 1} \phi(m+n,n) = \sum_{n\geq 1} \phi(n,n).$$

b. En déduire que

$$\zeta(4) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

11. Calculer, après avoir justifié son existence, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{t^3}{\mathrm{e}^t - 1}\,\mathrm{d}t$

On détaillera toutes les étapes et on pourra remarquer que, pour $t \in]0, +\infty[$, on a $\frac{1}{\mathrm{e}^t - 1} = \frac{\mathrm{e}^{-t}}{1 - \mathrm{e}^{-t}}$

Cette intégrale intervient notamment dans la théorie du rayonnement du corps noir.
La loi de Planck donne l'expression de la densité spectrale d'énergie électromagnétique u_λ rayonnée par le corps noir, en fonction de la longueur d'onde par la formule :

$$u_\lambda = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \frac{1}{\exp\left(\frac{hc}{k_B \lambda T}\right) - 1}$$

où h et k_B sont les constantes de Planck et de Boltzmann, c la célérité de la lumière dans le vide, λ la longueur d'onde et T la température.
Ainsi, la densité volumique totale d'énergie électromagnétique u (rayonnée sur tout le spectre des longueurs d'onde) s'écrit : $u = \int_0^{+\infty} u_\lambda \,\mathrm{d}\lambda$

Si on note M l'exitance totale d'un corps noir on sait que M et u sont liés par la relation $M = \frac{c}{4}u$

12. Démontrer la loi de Stefan : $M = \sigma T^4$ où $\sigma = \frac{2\pi^5 (k_B)^4}{15h^3c^2}$.