e3a - 2013 - MP

Épreuve de Mathématiques A

Partie I : étude de la suite (v_n)

1. Tout d'abord, la suite (v_n) est bien définie : une récurrence **double** permet de montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, v_n existe et est strictement positif. Et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq 0$, $\sqrt{v_n}\sqrt{v_{n+1}}v_{n+2} = 1$.
Si elle converge vers une limite ℓ finie ou infinie, alors $\ell \geq 0$ et par continuité de $x \mapsto \sqrt{x}$, on a $\ell^2 = 1$.
La seule limite possible de (v_n) est donc 1.

2. a. La suite (w_n) vérifie la relation de récurrence $w_{n+2} = -\dfrac{w_{n+1} + w_n}{2}$.

b. Le théorème de structure des solution d'une récurrence linéaire d'ordre 2 pour les suites numérique assure que l'espace vectoriel F est de dimension 2 (on peut le vérifier en montrant que $\varphi : F \to \mathbb{R}^2$ telle que $\varphi((w_n)_{\mathbb{N}}) = (w_0, w_1)$ est un isomorphisme de F dans $\mathbb{R}^2$).
On cherche des éléments de F de la forme (r^n) avec $r \neq 0$: en reportant dans la relation de récurrence on obtient l'équation caractéristique $r^2 = -\dfrac{r+1}{2}$, dont les 2 solutions distinctes sont $\dfrac{-1 \pm i\sqrt{7}}{4}$.
Donc $\left(\left(\dfrac{-1+i\sqrt{7}}{4}\right)^n, \left(\dfrac{-1-i\sqrt{7}}{4}\right)^n\right)$ est une base de F.

c. $\left|\dfrac{-1+i\sqrt{7}}{4}\right| = \left|\dfrac{-1-i\sqrt{7}}{4}\right| = \dfrac{\sqrt{2}}{2} < 1$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\dfrac{-1+i\sqrt{7}}{4}\right)^n = \lim_{n\to+\infty} \left(\dfrac{-1-i\sqrt{7}}{4}\right)^n = 0$.
On en déduit que si $(x_n) \in F$, alors $(x_n)_{\mathbb{N}}$ est combinaison linéaire de deux suites convergentes vers 0, donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} x_n = 0$.

3. $(w_n) \in F$ donc, d'après 2.(c), $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} w_n = 0$, or $v_n = e^{w_n}$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} v_n = 1$ et $\sum v_n$ diverge grossièrement.
Par contre, d'après ce qui précède, $v_n - 1 = e^{w_n} - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} w_n$ d'après le cours car $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} w_n = 0$. Donc $v_n - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} w_n = O\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$. Comme la série $\sum \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$ converge car géometrique de raison $q \in]-1, 1[$, $\sum(v_n - 1)$ est absolument convergente donc convergente.

Partie II : étude de normes matricielles

1. a. $DZ = \begin{pmatrix} m_{1,1}z_1 \\ m_{2,2}z_2 \\ \vdots \\ m_{n,n}z_n \end{pmatrix}$ donc $\|DZ\|_\infty = \displaystyle\max_{1\leq i\leq n} |m_{i,i}z_i| \leq m \max_{1\leq i\leq n} |z_i| = m\|Z\|_\infty$.
$\|DZ\|_\infty \leq m\|Z\|_\infty$.

b. Si $\|Z\|_\infty \leq 1$, alors on a $\|DZ\|_\infty \leq m$ d'où $|||D|||_\infty = \displaystyle\sup_{X\in\mathbb{C}^n, \|X\|_\infty\leq 1} \|DX\|_\infty \leq m$.
De plus, il existe un entier $j \in \{1, \cdots, n\}$ tel que $m = |m_{j,j}|$. En prenant $z_j = 1$ et pour $k \neq j$, $z_k = 0$ et $Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$, on a $\|DZ\|_\infty = m$ et $\|Z\|_\infty = 1$ d'où $|||D|||_\infty \geq m$. Finalement $|||D|||_\infty = m$.

2. a. $N_P(X) = \|PX\|_\infty$.
Si P n'est pas inversible, en prenant $X \in \operatorname{Ker} P$ non nul, on a $N_P(X) = 0$ et $X \neq 0$ donc N_P n'est pas une norme. Si P est inversible, alors N_P est une application de $\mathbb{C}^n$ dans $\mathbb{R}^+$ et

— $\forall X \in \mathbb{C}^n$, $N_P(X) = 0 \Rightarrow \|PX\|_\infty = 0 \Rightarrow PX = 0 \Rightarrow X = 0$ (car $\|.\|_\infty$ est une norme et P est inversible).

— $\forall X \in \mathbb{C}^n$, $\forall \lambda \in \mathbb{C}$, $N_P(\lambda X) = \|\lambda PX\|_\infty = |\lambda|\|PX\|_\infty = |\lambda| N_P(X)$.

— $\forall (X,Y) \in (\mathbb{C}^n)^2$, $N_P(X+Y) = \|P(X+Y)\|_\infty = \|PX+PY\|_\infty \leq \|PX\|_\infty + \|PY\|_\infty = N_P(X) + N_P(Y)$.

donc N_P est une norme. Finalement, N_P est une norme si et seulement si P est une matrice inversible.

b. $|||A|||_P = \sup\limits_{X\in\mathbb{C}^n, \|X\|_P \leq 1} \|AX\|_P = \sup\limits_{X\in\mathbb{C}^n, \|PX\|_\infty \leq 1} \|PAX\|_\infty = \sup\limits_{X\in\mathbb{C}^n, \|PX\|_\infty \leq 1} \|PAP^{-1}PX\|_\infty$

Or P est inversible, donc $X \mapsto PX$ est une bijection de $\mathbb{C}^n$ sur $\mathbb{C}^n$ donc

$\sup\limits_{X\in\mathbb{C}^n, \|PX\|_\infty \leq 1} \|PAP^{-1}PX\|_\infty = \sup\limits_{X\in\mathbb{C}^n, \|X\|_\infty \leq 1} \|PAP^{-1}X\|_\infty = |||PAP^{-1}|||_\infty$,

On a donc bien $|||A|||_P = |||PAP^{-1}|||_\infty$.

3. a. On sait que λ est une valeur propre de A associée au vecteur X si et seulement si λ est une valeur propre de PAP^{-1} associée au vecteur PX.

A et PAP^{-1} ont donc le même spectre et donc $\rho(A) = \rho(PAP^{-1})$.

b. Il existe une valeur propre λ de A telle que $|\lambda| = \rho(A)$. Soit X un vecteur propre unitaire associé à λ. $\rho(A) = |\lambda| = \|\lambda X\|_\infty = \|AX\|_\infty \leq |||A|||_\infty$.

En utilisant 2.(b), on en déduit : $\rho(A) = \rho(PAP^{-1}) \leq |||PAP^{-1}|||_\infty = |||A|||_P$, et donc $\rho(A) \leq |||A|||_P$.

c. On suppose A diagonalisable. Il existe une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que $D = PAP^{-1}$ (on remarquera que ce n'est pas la formule usuelle $A = PDP^{-1}$: les rôles de P et P^{-1} ont été échangés). D'après 2.(b), $|||A|||_P = |||PAP^{-1}|||_\infty = |||D|||_\infty$, d'après 1.(b), $|||D|||_\infty = \rho(D)$ et comme A et D sont semblables, $\rho(D) = \rho(A)$.

Il existe donc $P \in GL_n(\mathbb{C})$ tel que $|||A|||_P = \rho(A)$.

d. $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. $P_A(X) = 1 - X^3$, les valeurs propres de A sont 1, j et j^2

Donc $\rho(A) = 1$. Les vecteurs propres associés à 1, j et j^2 sont $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ j^2 \\ j \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ j \\ j^2 \end{pmatrix}$.

Si $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j^2 & j \\ 1 & j & j^2 \end{pmatrix}$ (attention encore à l'échange entre les rôles de P et P^{-1}...)

et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & j & 0 \\ 0 & 0 & j^2 \end{pmatrix}$, alors $D = PAP^{-1}$ et d'après 3.(c) $|||A|||_P = \rho(A)$.

e. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}$.

A est de rang 1 et le noyau E_0 est un hyperplan d'équation $x_1 + 2x_2 + \cdots + nx_n = 0$.

Une base de E_0 est : $\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} n \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$.

D'autre part, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre $\dfrac{n(n+1)}{2}$.

A est donc diagonalisable (la somme des dimensions des sous-espaces propres est n)

Si $P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & \cdots & n & 1 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & -1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \ddots & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \frac{n(n+1)}{2} \end{pmatrix}$, alors $D = PAP^{-1}$ et d'après 3.(c) $|||A|||_P = \rho(A)$.

4. a. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$.

$\|AZ\|_\infty = \left\| \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \right\|_\infty = \left\| \begin{pmatrix} az_1 + bz_2 \\ cz_1 + dz_2 \end{pmatrix} \right\|_\infty = \max(|az_1 + bz_2|, |cz_1 + dz_2|)$

$\leq \max(|az_1| + |bz_2|, |cz_1| + |dz_2|) \leq \max(|a| + |b|, |c| + |d|) \max(|z_1|, |z_2|) = m\|Z\|_\infty$.

On a donc $\|AZ\|_\infty \leq m\|Z\|_\infty$.

On en déduit $|||A|||_\infty \leq m$.

Si on suppose que $m = |a| + |b|$, alors on choisit z_1 et z_2 de module 1 tels que $|a| = az_1$ et $|b| = bz_2$.

On a alors $\|AZ\|_\infty = \max(|az_1 + bz_2|, |cz_1 + dz_2|) = \max(m, |cz_1 + dz_2|) = m$ et $\|Z\|_\infty = 1$.

De même si $m = |c| + |d|$.

On en déduit $|||A|||_\infty \geq m$.

On a donc $|||A|||_\infty = m$.

b. i. $A \in M_2(\mathbb{C})$, non diagonalisable.

On effectue une réduction dans $\mathbb{C}$, donc $\mathrm{sp}_{\mathbb{C}}(A) \neq \emptyset$ (ne pas oublier de le mentionner...)

Si $\mathrm{sp}_{\mathbb{C}}(A)$ possèdait deux éléments, alors le polynôme caractéristique de A serait scindé à racines simples et A serait diagonalisable, donc $\mathrm{sp}_{\mathbb{C}}(A)$ ne contient qu'un élément.

ii. On choisit une base $e = (e_1, e_2)$ de E, avec e_1 un vecteur propre de f associé à la valeur propre α.

La matrice dans la base e de f est alors triangulaire supérieure, avec les valeurs propres sur la diagonale. Elle est donc de la forme $\mathrm{Mat}e(f) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$.

iii. β est non nul car A n'est pas diagonalisable.

Posons $e'_1 = \frac{\beta}{\varepsilon} e_1$ et $e'_2 = e_2$.

$e' = (e'_1, e'_2)$ est une base de $\mathbb{C}^2$, $f(e'_1) = e'_1$, $f(e'_2) = f(e_2) = \beta e_1 + \alpha e_2 = \varepsilon e'_1 + \alpha e'_2$.

On a donc $\mathrm{Mat}e'(f) = \begin{pmatrix} \alpha & \varepsilon \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$. Il existe donc une base e' de $\mathbb{C}^2$ telle que $\mathrm{Mat}e'(f) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta' \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$ où $|\beta'| \leq \varepsilon$.

iv. Notons $T = \begin{pmatrix} \alpha & \beta' \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$. Il existe une matrice $P \in GL_2(\mathbb{C})$ telle que $T = PAP^{-1}$.

On a alors $|||A|||_P = |||PAP^{-1}|||_\infty = |||T|||_\infty = |\alpha| + |\beta'| \leq |\alpha| + \varepsilon = \rho(A) + \varepsilon$.

Il existe donc une matrice $P \in GL_2(\mathbb{C})$ telle que $|||A|||_P \leq \rho(A) + \varepsilon$.

c. D'après 4.(b) iv., $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists P \in GL_2(\mathbb{C}) \quad |||A|||_P \leq \rho(A) + \varepsilon$.

On a donc $\inf\limits_{P \in GL_2(\mathbb{C})} |||A|||_P \leq \rho(A)$.

D'après 3.(b), si $P \in GL_2(\mathbb{C})$ alors $|||A|||_P \geq \rho(A)$.

On a donc $\inf\limits_{P \in GL_2(\mathbb{C})} |||A|||_P \geq \rho(A)$.

Finalement $\inf\limits_{P \in GL_2(\mathbb{C})} |||A|||_P = \rho(A)$.

d. $A = \begin{pmatrix} -3 & 8 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$.

$|||A|||_\infty = \max(|-3| + |8|, |-2| + |5|) = 11$.

$P_A(X) = (X - 1)^2$ et $\dim(E_1) = 1$ donc A est non diagonalisable et $\mathrm{sp}\,(A) = \{1\}$.

On a donc $\rho(A) = 1$ et d'après 4.(b) iii., A est semblable à une matrice de la forme $T = \begin{pmatrix} 1 & \beta' \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ avec $|\beta'| \leq 1$.

Il existe donc $P \in GL_2(\mathbb{C})$ telle que $T = PAP^{-1}$.

$|||A|||_P = |||PAP^{-1}|||_\infty = |||T|||_\infty = 1 + |\beta'| \leq 2$.

Il existe donc une matrice $P \in GL_2(\mathbb{C})$ telle que $|||A|||_P \leq 2$.

e. On utilise la question 4.(b) avec $\varepsilon = \dfrac{1 - \rho(A)}{2} > 0$.

On a alors $|||A|||_P \leq \rho(A) + \varepsilon = \dfrac{1 + \rho(A)}{2} < 1$.

On rappelle que $|||A|||_P = \sup\limits_{X \in \mathbb{C}^n, \|X\|_P \leq 1} \|AX\|_P$.

Donc pour tout X tel que $\|X\|_P \leq 1$, on a $\|AX\|_P \leq |||A|||_P \|X\|_P \leq |||A|||_P$. Alors, par homogénéité, pour tout $Y = \|Y\|_P \cdot X$, $\|AY\|_P \leq |||A|||_P \|Y\|_P$. En particulier pour tout X tel que $\|X\|_P \leq 1$, en posant $Y = BX$, on obtient

$$\|ABX\|_P = \|AY\|_P \leq |||A|||_P \|Y\|_P = |||A|||_P \|BX\|_P \leq |||A|||_P |||B|||_P \|X\|_P \leq |||A|||_P |||B|||_P.$$

Donc en passant à la borne supérieure pour X tel que $\|X\|_P \leq 1$, $|||AB|||_P \leq |||A|||_P |||B|||_P$ (on dit avoir affaire à une norme d'algèbre et il est bon de savoir adapter cette preuve et démontrer que toute norme subordonnée est une norme d'algèbre.)
Par récurrence, on montre alors que $|||A^n|||_P \leq |||A|||_P{}^n$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} |||A^n|||_P = 0$.

Partie III : étude de la suite (u_n)

On est obligé d'admettre les résultats des premières questions (notamment 5.(b)). Les questions abordables sont traitées : les autres sont corrigées à la fin du sujet pour les plus curieux.

1.

2. $(a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ est un point fixe de f si et seulement si $(a, b) = (b, \frac{2}{a+b})$.
Le seul point fixe de f dans $(\mathbb{R}_+^*)^2$ est $(1, 1)$.

3.

4.

5. a.

b. On admet que pour $(x_0, y_0) \in D \cap (\mathbb{R}_+^*)^2$,
$\|(1, 1) - f(x_0, y_0)\|_P \leq \alpha \|(1, 1) - (x_0, x_0)\|_P$.

c. Montrons par récurrence sur $n \geq n_0$ que $\quad (u_n, u_{n+1}) \in D$.
Par hypothèse, pour $n = n_0$, $(u_{n_0}, u_{n_0+1}) \in D$.
Supposons que pour un entier $n \geq n_0$ donné, $(u_n, u_{n+1}) \in D$.
On a alors : $\|(1, 1) - (u_{n+1}, u_{n+2})\|_P = \|(1, 1) - f(u_n, u_{n+1})\|_P$ et d'après la question précédente,
$(u_n, u_{n+1}) \in D \Longrightarrow \|(1, 1) - f(u_n, u_{n+1})\|_P \leq \alpha \|(1, 1) - (u_n, u_{n+1})\|_P \leq \|(1, 1) - (u_n, u_{n+1})\|_P \leq \eta$.
Donc $\|(1, 1) - (u_{n+1}, u_{n+2})\|_P \leq \eta$ et $(u_n, u_{n+1}) \in D$.
Finalement, la propriété est vraie au rang n_0 et elle est héréditaire, elle est donc vraie pour tout entier $n \geq n_0$: $\forall n \geq n_0, \quad (u_n, u_{n+1}) \in D$.

d. Montrons par récurrence sur $n \geq n_0$ que $\quad \|(1, 1) - (u_n, u_{n+1})\|_P \leq \alpha^{n-n_0} \|(1, 1) - (u_{n_0}, u_{n_0+1})\|_P$.
Pour $n = n_0$, la relation est évidente.
Supposons que pour un entier $n \geq n_0$ donné,
$\|(1, 1) - (u_n, u_{n+1})\|_P \leq \alpha^{n-n_0} \|(1, 1) - (u_{n_0}, u_{n_0+1})\|_P$.
Alors, $\|(1, 1) - (u_{n+1}, u_{n+2})\|_P = \|(1, 1) - f(u_n, u_{n+1})\|_P$
et comme $(u_n, u_{n+1}) \in D$, d'après la question 5.(b),
$\|(1, 1) - f(u_n, u_{n+1})\|_P \leq \alpha \|(1, 1) - (u_n, u_{n+1})\|_P$
On a donc $\|(1, 1) - (u_{n+1}, u_{n+2})\|_P \leq \alpha^{n+1-n_0} \|(1, 1) - (u_{n_0}, u_{n_0+1})\|_P$.
Finalement, la propriété est vraie au rang n_0 et elle est héréditaire, elle est donc vraie pour tout entier $n \geq n_0$: $\forall n \geq n_0, \quad \|(1, 1) - (u_n, u_{n+1})\|_P \leq \alpha^{n-n_0} \|(1, 1) - (u_{n_0}, u_{n_0+1})\|_P$.

e. Les normes $\|.\|_P$ et $\|.\|_\infty$ sont équivalentes (dimension finie), il existe donc un réel $c > 0$ tel que $\|.\|_\infty \leq c\|.\|_P$.
On a alors, $\forall n \geq n_0$, $|1 - u_n| \leq \|(1, 1) - (u_n, u_{n+1})\|_\infty \leq c\|(1, 1) - (u_n, u_{n+1})\|_P \leq c\alpha^{n-n_0} \|(1, 1) - (u_{n_0}, u_{n_0+1})\|_P$, et donc $u_n = 1 + O(\alpha^n)$.

f. $u_n = 1 + O(\alpha^n)$ et $\frac{\sqrt{2}}{2} < \alpha < 1$.
Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$, $\sum u_n$ diverge et $\sum (u_n - 1)$ est absolument convergente.

Partie IV : suite de l'étude

1. a. La suite (x_n) ne converge pas vers λ se traduit par $\exists \tau > 0 \ \forall N \in \mathbb{N} \ \exists n > N \ |x_n - \lambda| > \tau$ (négation de la définition de (x_n) converge vers λ).

En utilisant cette relation, on construit une suite $(x_{\varphi(n)})$ extraite de (x_n) telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|x_{\varphi(n)} - \lambda| > \tau$.

La suite $(x_{\varphi(n)})$ est bornée (extraite de (x_n)), on peut donc en extraire une sous-suite qui converge vers une limite λ'. Nécessairement, $|\lambda' - \lambda| \geq \tau > 0$ donc $\lambda' \neq \lambda$.

Donc la suite (x_n) admet une valeur d'adhérence $\lambda' \neq \lambda$.

b. Toute suite bornée possède au moins une valeur d'adhérence. D'après la question précédente, si une suite est bornée et non convergente, alors elle possède au moins deux valeurs d'adhérences.

Donc par contraposée, toute suite bornée ayant une unique valeur d'adhérence est convergente.

c. (x_n) est une suite bornée.

Si $l_- = l_+$, alors (x_n) est bornée et possède une unique valeur d'adhérence, donc d'après la question précédente, elle est convergente.

Si (x_n) est convergente, alors elle possède une unique valeur d'adhérence donc $l_- = l_+$.

Finalement (x_n) est convergente si et seulement si $l_- = l_+$.

2. a. Montrons que $\alpha \leq u_n \leq \frac{1}{\alpha}$ par récurrence double sur $n \in \mathbb{N}$.

Par hypothèse, pour $n = 0$ et $n = 1$, la relation est vraie.

Supposons que pour un entier $n \geq n_0$ donné, $\alpha \leq u_n \leq \frac{1}{\alpha}$ et $\alpha \leq u_{n+1} \leq \frac{1}{\alpha}$.

Alors, $u_{n+2} = \dfrac{2}{u_{n+1} + u_n} \leq \dfrac{2}{\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha}} = \alpha$ et $u_{n+2} = \dfrac{2}{u_{n+1} + u_n} \geq \dfrac{2}{\alpha + \alpha} = \dfrac{1}{\alpha}$ donc $\alpha \leq u_{n+2} \leq \frac{1}{\alpha}$

Finalement, la propriété est vraie au rang 0 et 1 et elle est héréditaire, elle est donc vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$: $\forall n \in \mathbb{N} \quad \alpha \leq u_n \leq \frac{1}{\alpha}$.

b. l_- est la plus petite valeur d'adhérence de la suite (u_n). C'est donc la limite d'une suite extraite que l'on notera $u_{\psi(n)}$.

la suite $u_{\psi(n)-2}$ est alors bornée, elle possède une sous-suite $u_{\psi\circ\chi(n)-2}$ qui converge vers une limite a. En posant $\varphi : n \mapsto \psi \circ \chi(n) - 2$, on a alors :

$u_{\varphi(n)+2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l_-$ et $u_{\varphi(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a$, or $u_{\varphi(n)+1} = \dfrac{2}{u_{\varphi(n)+2}} - u_{\varphi(n)}$ donc $(u_{\varphi(n)+1})$ converge. On note b sa limite.

Par passage à la limite dans $u_{\varphi(n)+2} = \dfrac{2}{u_{\varphi(n)+1} + u_{\varphi(n)}}$, on obtient $l_- = \dfrac{2}{a+b}$.

De plus $a \leq l_+$ et $b \leq l_+$ donc $l_- \geq \dfrac{2}{l_+ + l_+} = \dfrac{1}{l_+}$. On en déduit $l_- l_+ \geq 1$.

c. On procède de même en considérant une sous-suite $u_{\psi(n)}$ qui converge vers l_+ et on obtient $l_- l_+ \leq 1$ d'où $l_- l_+ = 1$.

d. De même qu'en (b), on contruit successivement :

$(u_{\psi(n)})$ qui converge vers l_-

$(u_{\psi\circ\chi(n)-3})$ qui converge vers une limite a.

$(u_{\psi\circ\chi\circ\omega(n)-2})$ qui converge vers une limite b.

En posant $\varphi : n \mapsto \psi \circ \chi \circ \omega(n) - 3$, on a alors :

$u_{\varphi(n)+3} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l_-$, $u_{\varphi(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a$ et $u_{\varphi(n)+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} b$.

Or $u_{\varphi(n)+2} = \dfrac{2}{u_{\varphi(n)+3}} - u_{\varphi(n)+1}$ donc $(u_{\varphi(n)+2})$ converge. On note c sa limite.

Par passage à la limite dans $u_{\varphi(n)+2} = \dfrac{2}{u_{\varphi(n)+1} + u_{\varphi(n)}}$ et dans $u_{\varphi(n)+3} = \dfrac{2}{u_{\varphi(n)+2} + u_{\varphi(n)+1}}$

on obtient $c = \dfrac{2}{a+b}$ et $l_- = \dfrac{2}{b+c}$.

On a donc $b + c = \dfrac{2}{l_-} = 2l_+$ et $b \leq l_+$ et $c \leq l_+$, donc $b = c = l_+$.

De même $l_+ = c = \dfrac{2}{a+b}$ donc $a = b = l_-$.

On a alors $b = l_+$ et $b = l_-$ d'où $l_+ = l_-$.

$l_+ = l_-$, $l_- l_+ \geq 1$ et (u_n) est une suite de réels positifs donc $l_+ = l_- = 1$ et donc La suite (u_n) converge vers 1.

e. La suite $((u_n, u_{n+1})$ converge vers $(1,1)$ donc

il existe bien un entier n_0 tel que $((u_{n_0}, u_{n_0+1}) \in D$.

Partie III : étude de la suite (u_n)

Voici l'intégralité de la correction

1. $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=(0,-\dfrac{2}{(x+y)^2})$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=(1,-\dfrac{2}{(x+y)^2})$.

$\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ existent et sont continues sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$, donc f est de classe C^1 sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$.

2. $(a,b)\in(\mathbb{R}_+^*)^2$ est un point fixe de f si et seulement si $(a,b)=(b,\frac{2}{a+b})$.

Le seul point fixe de f dans $(\mathbb{R}_+^*)^2$ est $(1,1)$.

3. $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,1)=(0,-\frac{1}{2})$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,1)=(1,-\frac{1}{2})$ donc $J_{(1,1)}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$.

4. Le polynôme caractéristique de $J_{(1,1)}$ est $P_{J_{(1,1)}}(X)=X^2+\frac{1}{2}X+\frac{1}{2}$. Ses valeurs propres sont $\dfrac{-1+i\sqrt{7}}{4}$ et $\dfrac{-1-i\sqrt{7}}{4}$ de module $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, donc $\rho(J_{(1,1)})=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

$J_{(1,1)}$ est donc diagonalisable (2 valeurs propres distinctes) et d'après la question II.3.(c),

il existe $P\in GL_2(\mathbb{C})$ tel que $|||J_{(1,1)}|||_P=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

5. a. $J_{(x,y)}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -\frac{1}{(x+y)^2} & -\frac{1}{(x+y)^2}\end{pmatrix}$ et $(x,y)\mapsto\frac{1}{(x+y)^2}$ est continue sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$.

$(x,y)\mapsto J_{(x,y)}$ est donc continue sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$. On est en dimension finie, donc la continuité ne dépend pas du choix des normes.

Soit $\varepsilon=\alpha-\dfrac{\sqrt{2}}{2}>0$. (car $\dfrac{\sqrt{2}}{2}<\alpha<1$)

Ecrivons la continuité de J en $(1,1)$ pour la norme $||.||_P$ au départ et la norme $|||.|||_P$ à l'arrivée :

$\exists\eta>0\quad\forall(x_0,y_0)\in(\mathbb{R}_+^*)^2\quad\big(||(1,1)-(x_0,y_0)||_P\leq\eta\Longrightarrow|||J_{(x_0,y_0)}-J_{(1,1)}|||_P\leq\varepsilon\big)$.

De l'inégalité triangulaire on déduit :

$$|||J_{(x_0,y_0)}-J_{(1,1)}|||_P\leq\varepsilon\Longrightarrow|||J_{(x_0,y_0)}|||_P\leq|||J_{(1,1)}|||_P+\varepsilon=\frac{\sqrt{2}}{2}+\varepsilon=\alpha.$$

D'où finalement, $\exists\eta>0\quad\forall(x_0,y_0)\in(\mathbb{R}_+^*)^2\quad\big(||(1,1)-(x_0,y_0)||_P\leq\eta\Longrightarrow||J_{(1,1)}|||_P\leq\alpha\big)$.

b. $\varphi(t)=f\big((1,1)+t\,((x_0,y_0)-(1,1))\big)$.

f est C^1 sur D et $t\mapsto(1,1)+t\,((x_0,y_0)-(1,1))$ est C^1 de $[0,1]$ dans D, par composition, φ est C^1 sur $[0,1]$.

f étant C^1 sur D, il existe une fonction ε de limite nulle en 0 telle que pour tout vecteur h tel que $\|h\|_P\leq\eta$, $f\big((1,1)+h\big)=f\big((1,1)\big)+\mathrm{d}\,f_{(x_0,y_0)}(h)+\|h\|_P\varepsilon(h)$.

Pour simplifier les écritures, posons $X=(1,1)+t\,((x_0,y_0)-(1,1))$ et $H=(x_0,y_0)-(1,1)$

$$\varphi'(t)=\lim_{\substack{u\to0\\ \neq}}\frac{\varphi(t+u)-\varphi(t)}{u}=\lim_{\substack{u\to0\\ \neq}}\frac{f(X+uH)-f(X)}{u}=D_Hf(X)=\mathrm{d}\,f_X(H)$$

($D_Hf(X)$ est la dérivée de f en X suivant le vecteur H)

$\varphi'(t)=\mathrm{d}\,f_{\big((1,1)+t((x_0,y_0)-(1,1))\big)}((x_0,y_0)-(1,1))$

Majorons $||\varphi'(t)||_P$ pour appliquer l'inégalité des accroissements finis.

$\mathrm{d}\,f_X$ est une application linéaire de matrice J_X dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$. On en déduit que $||\varphi'(t)||_P=||\,\mathrm{d}\,f_X(H)||_P=||J_X(H)||_P\leq|||J_X|||_P||H||_P$

Or $\|(1,1)-X\|_P=\|t\,((x_0,y_0)-(1,1))\,\|_P\leq\eta$

donc d'après 5.(a) $|||J_X|||_P\leq\alpha$ et $||\varphi'(t)||_P\leq\alpha\|H\|_P$

φ est de classe C^1 de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}^2$, $\forall t\in[0,1]\quad||\varphi'(t)||_P\leq\alpha\|H\|_P$, d'après l'inégalité des accroissements finis, $\|\varphi(0)-\varphi(1)\|_P\leq\alpha\|H\|_P$

De plus $\varphi(0)=f(1,1)=(1,1)$, en reprenant les notations de l'énoncé, on obtient :

$\|(1,1)-f(x_0,y_0)\|\leq\alpha\|(1,1)-(x_0,x_0)\|_P$.

c. Montrons par récurrence sur n que $\forall n\geq n_0,\quad(u_n,u_{n+1})\in D$.

Par hypothèse, pour $n=n_0$, $(u_{n_0},u_{n_0+1})\in D$.

Supposons que pour un entier $n\geq n_0$ donné, $(u_n,u_{n+1})\in D$.

On a alors : $\|(1,1)-(u_{n+1},u_{n+2})\|_P=\|(1,1)-f(u_n,u_{n+1})\|_P$ et d'après la question précédente,

$(u_n, u_{n+1}) \in D \Longrightarrow \|(1,1) - f(u_n, u_{n+1})\|_P \leq \alpha\|(1,1) - (u_n, u_{n+1})\|_P \leq \|(1,1) - (u_n, u_{n+1})\|_P \leq \eta$.
Donc $\|(1,1) - (u_{n+1}, u_{n+2})\|_P \leq \eta$ et $(u_n, u_{n+1}) \in D$.
Finalement, la propriété est vraie au rang n_0 et elle est héréditaire, elle est donc vraie pour tout entier $n \geq n_0$: $\forall n \geq n_0, \quad (u_n, u_{n+1}) \in D$.

d. Montrons par récurrence sur n que :
$\forall n \geq n_0, \quad \|(1,1) - (u_n, u_{n+1})\|_P \leq \alpha^{n-n_0}\|(1,1) - (u_{n_0}, u_{n_0+1})\|_P$.
Pour $n = n_0$, la relation est évidente.
Supposons que pour un entier $n \geq n_0$ donné,
$\|(1,1) - (u_n, u_{n+1})\|_P \leq \alpha^{n-n_0}\|(1,1) - (u_{n_0}, u_{n_0+1})\|_P$.
Alors, $\|(1,1) - (u_{n+1}, u_{n+2})\|_P = \|(1,1) - f(u_n, u_{n+1})\|_P$
et comme $(u_n, u_{n+1}) \in D$, d'après la question 5.(b),
$\|(1,1) - f(u_n, u_{n+1})\|_P \leq \alpha\|(1,1) - (u_n, u_{n+1})\|_P$
On a donc $\|(1,1) - (u_{n+1}, u_{n+2})\|_P \leq \alpha^{n+1-n_0}\|(1,1) - (u_{n_0}, u_{n_0+1})\|_P$.
Finalement, la propriété est vraie au rang n_0 et elle est héréditaire, elle est donc vraie pour tout entier $n \geq n_0$: $\forall n \geq n_0, \quad \|(1,1) - (u_n, u_{n+1})\|_P \leq \alpha^{n-n_0}\|(1,1) - (u_{n_0}, u_{n_0+1})\|_P$.

e. Les normes $\|.\|_P$ et $\|.\|_\infty$ sont équivalentes (dimension finie), il existe donc un réel $c > 0$ tel que $\|.\|_\infty \leq c\|.\|_P$.
On a alors, $\forall n \geq n_0$, $|1 - u_n| \leq \|(1,1) - (u_n, u_{n+1})\|_\infty \leq c\|(1,1) - (u_n, u_{n+1})\|_P \leq c\alpha^{n-n_0}\|(1,1) - (u_{n_0}, u_{n_0+1})\|_P$, et donc $u_n = 1 + O(\alpha^n)$.

f. $u_n = 1 + O(\alpha^n)$ et $\frac{\sqrt{2}}{2} < \alpha < 1$.
Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$, $\sum u_n$ diverge et $\sum (u_n - 1)$ converge absolument.