Problème inspiré d'une épreuve de concours.

On note E l'espace vectoriel des suites réelles. La suite réelle de terme général u_n sera notée $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

On considère l'endomorphisme Δ de E qui à toute suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E associe la suite $v = \Delta(u)$ de terme général défini par

$$\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ v_n = (\Delta(u))_n = u_{n+1} - u_n$$

Partie I.

1) Montrer qu'une suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E converge si et seulement si la série de terme général $(\Delta(u))_n$ converge.

Pour tout $p \in \mathbb{N}$ on note Δ^p le p-ième itéré de Δ défini par

$$\Delta^0 = Id_E\ ,\ \forall p \in \mathbb{N}\ ,\ \Delta^{p+1} = \Delta \circ \Delta^p$$

On dit qu'une suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est complètement monotone si pour tous naturels n et p on a

$$(-1)^p(\Delta^p(u))_n > 0$$

2) Soit $f \in C^\infty(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$. Dans cette question on pose pour tout naturel n , $u_n = f(n)$.

a) Montrer que pour tout entier naturel n, il existe un réel x de l'intervalle $]n, n+1[$ tel que $(\Delta(u))_n = f'(x)$.

b) Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ on considère la propriété suivante :

$\mathcal{P}(p)$: $\forall f \in C^\infty(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$, $\forall n \in \mathbb{N}$, en posant $u_n = f(n)$, $\exists x \in]n, n+p[$ tel que $(\Delta^p(u))_n = f^{(p)}(x)$.

Montrer par récurrence sur p que cette propriété est réalisée pour tout $p \in \mathbb{N}^*$.

On appliquera l'hypothèse de récurrence à la fonction $g : x \mapsto f(x+1) - f(x)$ et à la suite $v_n = g(n)$.

c) On pose $f : x \mapsto \frac{1}{x+1}$.

i) Déterminer pour tout p la dérivée p-ième de f.

ii) Utiliser le b) afin de montrer que la suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ u_n = \frac{1}{n+1}$$

est complètement monotone.

3) Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$.

a) Expliciter, en fonction de u, le terme général w_n de la suite $w = \Delta^2(u) = \Delta(\Delta(u))$.

b) Expliciter, en fonction de u, le terme général z_n de la suite $z = \Delta^3(u) = \Delta(\Delta(\Delta(u)))$.

On définit T l'endomorphisme de E de E par

$$\forall u \in E\ ,\ \forall n \in \mathbb{N}\ ,\ (T(u))_n = u_{n+1}$$

c) Ecrire une relation simple entre Δ , T et Id.

d) En déduire que pour $u \in E$, $p \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$(\Delta^p(u))_n = \sum_{k=0}^{p}(-1)^{p-k}\begin{pmatrix} p \\ k \end{pmatrix} u_{n+k}$$

4) Soit $b \in]0,1[$. Dans cette question on pose pour tout naturel n , $u_n = b^n$.

Utiliser le 3) pour calculer $(\Delta^p(u))_n$ pour tous p et n et en déduire que la suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est complètement monotone.

Partie II.

Soit ω une fonction continue et positive sur $[0,1]$ non identiquement nulle.
Dans toute cette partie on considèrera la suite u de terme général

$$u_n = \int_0^1 t^n \omega(t)\ dt$$

5) a) Montrer que la série de terme général $(-1)^k u_k$ converge et que

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k u_k = \int_0^1 \frac{\omega(t)}{1+t}\ dt$$

b) Montrer que pour tous naturels p et n

$$(-1)^p (\Delta^p(u))_n = \int_0^1 t^n (1-t)^p \omega(t)\ dt$$

c) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est complètement monotone.

d) Montrer que

$$\int_0^1 \frac{\omega(t)}{1+t}\ dt = \int_0^1 \sum_{p=0}^{\infty} \left(\frac{1-t}{2}\right)^p \omega(t)\ dt$$

e) Les 5/2 démontrent et les 3/2 admettent que

$$\int_0^1 \sum_{p=0}^{\infty} \left(\frac{1-t}{2}\right)^p \omega(t)\ dt = \sum_{p=0}^{\infty} \int_0^1 \left(\frac{1-t}{2}\right)^p \omega(t)\ dt$$

f) En déduire, en utilisant la question 3) d), que

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k u_k = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2^{p+1}} (\Delta^p(u))_0$$

6) Dans cette question on pose pour tout t, $\omega(t) = 1$.

Utiliser le 5) pour montrer que

$$\ln 2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(p+1)2^{p+1}}$$

Partie III.

Dans cette partie on se donne une suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que la série de terme général $(-1)^n u_n$ soit convergente et on note S sa somme.

7) Donner une condition suffisante sur la suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour que cela soit réalisé

Dans la suite on ne supposera pas la réalisation de la condition du 7) mais seulement l'hypothèse de convergence de la série de terme général $(-1)^n u_n$

Le but est de démontrer que

$$S=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k u_k=\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^p}{2^{p+1}}(\Delta^p(u))_0$$

8) a) Utiliser le 3) d) pour montrer que

$$\forall p\in\mathbb{N}\ ,\ \lim_{n\to\infty}(\Delta^p(u))_n=0$$

b) Montrer que pour tout suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de limite nulle on a

$$\lim_{p\to\infty}\frac{1}{2^p}\sum_{k=0}^{p}\begin{pmatrix} p\\ k\end{pmatrix} r_k=0$$

On pourra utiliser une preuve similaire à celle du théorème de Césaro.

9) a) En déduire que

$$\forall n\in\mathbb{N}\ ,\ u_n=\sum_{p=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^p}{2^p}(\Delta^p(u))_n-\frac{(-1)^{p+1}}{2^{p+1}}(\Delta^{p+1}(u))_n\right)$$

b) Montrer que

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\left(\frac{(-1)^p}{2^p}(\Delta^p(u))_n-\frac{(-1)^{p+1}}{2^{p+1}}(\Delta^{p+1}(u))_n\right)=\frac{(-1)^p}{2^{p+1}}(\Delta^p(u))_0$$

10) a) On pose pour tout entier naturel n

$$E_n=\sum_{p=0}^{n}\frac{(-1)^p}{2^{p+1}}(\Delta^p(u))_0$$

Montrer que

$$E_n-S=-\frac{1}{2^{n+1}}\sum_{p=0}^{n+1}\begin{pmatrix} n+1\\ p\end{pmatrix}\left(\sum_{k=p}^{+\infty}(-1)^k u_k\right)$$

b) Conclure en appliquant le 8)b).

11) Soit $b\in]0,1[$. Dans cette question on pose pour tout naturel n , $u_n=b^n$.

Pourquoi la série de terme général $(-1)^n u_n$ est-elle convergente ?

Quelle égalité nous est donnée par le résultat démontré ?

Élements de correction :

Partie I.

1) La somme partielle de rang n de la série de terme général $(\Delta(u))_n$ vaut :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} (\Delta(u))_k = \sum_{k=0}^{n} u_{k+1} - u_k = u_{n+1} - u_0$$

converge donc ssi la suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

2) Soit $f \in C^\infty(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$. Dans cette question on pose pour tout naturel n , $u_n = f(n)$.

a) Pour tout entier naturel n, f est de classe C^1 sur $[n, n+1]$ donc en appliquant le théorème des accroissements finis, il existe un réel x de l'intervalle $]n, n+1[$ tel que $f'(x) = \frac{f(n+1)-f(n)}{n+1-n} = u_{n+1} - u_n = (\Delta(u))_n$.

b) Pour tout $p \in \mathbb{N}$ on considère la propriété suivante :

$\mathcal{P}(p)$: $\forall f \in C^\infty(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$, $\forall n \in \mathbb{N}$, en posant $u_n = f(n)$, $\exists x \in]n, n+p[$ tel que $(\Delta^p(u))_n = f^{(p)}(x)$.

Montrons par récurrence sur p que cette propriété est réalisée pour tout $p \in \mathbb{N}$.

L'initialisation pour $p = 1$ vient de la question a.
Soit $p \in \mathbb{N}^*$; supposons $\mathcal{P}(p)$ vraie ; soit f indéfiniment dérivable de $\mathbb{R}+$ dans $\mathbb{R}$. Définissons $g : \mathbb{R}+ \to \mathbb{R}$ par : $\forall x \geq 0, g(x) = f(x+1) - f(x)$, et la suite (v_n) par : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = g(n)$, *i.e.* $v_n = (\Delta u)_n$. Alors g est indéfiniment dérivable, et en lui appliquant $\mathcal{P}(p)$: pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $y \in]n, n+p[$ tel que

$$(\Delta^{p+1}u)_n = (\Delta^p v)_n = g^{(p)}(y) = f^{(p)}(y+1) - f^{(p)}(y).$$

On peut réappliquer l'égalité des accroissements finis à $f^{(p)}$ (indéfiniment dérivable), et il existe $x \in]y, y+1[\subset]n, n+p+1[$ tel que $f^{(p)}(y+1) - f^{(p)}(y) = f^{(p+1)}(x)$. Il s'ensuit que $\mathcal{P}(p+1)$ est vraie, et le résultat requis s'en déduit par récurrence sur p.
c) On pose $f : x \mapsto \frac{1}{x+1}$.

i) Une récurrence simple montre que $\forall p \in \mathbb{N}, \forall x \geq 0, f^{(p)}(x) = \frac{(-1)^p p!}{(x+1)^{p+1}}$.
ii) En appliquant le 2) b) ., il vient :

$$\forall p \geq 1, \forall n \in \mathbb{N}, \exists x \in]n, n+p[, (\Delta^p a)_n = \frac{(-1)^p p!}{(x+1)^{p+1}}.$$

Il s'ensuit que $(-1)^p(\Delta^p a)_n = \frac{p!}{(x+1)^{p+1}} > 0$. Comme de plus $\forall n \in \mathbb{N}, (\Delta^0 a)_n = a_n > 0$, il en découle que (a_n) est complètement monotone.

3) Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$.

a) En posant $w = \Delta^2(u) = \Delta(\Delta(u))$ on a par un calcul immédiat pour tout n :

$$w_n = u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n$$

b) Et avec $z = \Delta^3(u) = \Delta(\Delta(\Delta(u)))$ on obtient

$$z_n = u_{n+3} - 3u_{n+2} + 3u_{n+1} - u_n$$

La formule du binme se profile l'horizon...

On définit T l'endomorphisme de E de E par

$$\forall u \in E \ , \ \forall n \in \mathbb{N} \ , \ (T(u))_n = u_{n+1}$$

c) On a $\Delta = T - id_E$.

d) Comme T et id_E commutent, on peut appliquer la formule du binôme de Newton dans l'anneau $\mathcal{L}(E)$:

$$\forall p \in \mathbb{N}, \Delta^p = \sum_{k=0}^{p} (-1)^{p-k} \begin{pmatrix} p \\ k \end{pmatrix} T^k.$$

D'où

$$\forall u \in E, \forall p \geq 1, \forall n \in \mathbb{N}, (\Delta^p u)_n = \sum_{k=0}^{p} (-1)^{p-k} \begin{pmatrix} p \\ k \end{pmatrix} u_{n+k}.$$

4) Soit $b \in]0,1[$. Dans cette question on pose pour tout naturel n , $u_n = b^n$.

La formule du) 3)d) fournit

$$\forall (p,n) \in \mathbb{N}^2, (-1)^p (\Delta^p b)_n = \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \begin{pmatrix} p \\ k \end{pmatrix} b^{n+k} = b^n (1-b)^p$$

(en réappliquant le binôme de Newton au développement de $(1-b)^p$).
Comme $b \in]0,1[$, il s'ensuit que (b_n) est complètement monotone.

Partie II.

Soit ω une fonction continue et positive sur $[0,1]$ non identiquement nulle.
Dans toute cette partie on considèrera la suite u de terme général

$$u_n = \int_0^1 t^n \omega(t)\ dt$$

5) a) La suite u_n est positive et décroissante car

$$\forall t \in [0,1] t^{n+1} \leq t^n \text{ donc } \omega(t) t^{n+1} \leq \omega(t) t^n \text{ donc en intégrant } u_{n+1} \leq u_n$$

Sa limite est nulle car pour tout n :

$$|u_n| \leq \int_0^1 \max \omega\ t^n\ dt \leq \frac{\max \omega}{n+1}$$

Donc par le théorème spécial des séries alternées la série de terme général $(-1)^k u_k$ converge.

Par ailleurs pour tout naturel n,

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k u_k = \int_0^1 \omega(t) \sum_{k=0}^{n} (-t)^k\ dt = \int_0^1 \omega(t) \frac{1-(-t)^{n+1}}{1+t} = \int_0^1 \frac{\omega(t)}{1+t} - \int_0^1 \frac{(-t)^{n+1} \omega(t)}{1+t}$$

Le dernier terme se majore en module par

$$\int_0^1 \max \omega\ t^{n+1} = \max \omega\ \frac{1}{n+2}$$

qui converge bien vers 0.

b)
D'après la formule du 3) d), et en utilisant les calculs effectués au 4) :

$$\forall (p,n) \in \mathbb{N}^2, (-1)^p (\Delta^p u)_n = \int_0^1 \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \begin{pmatrix} p \\ k \end{pmatrix} t^{n+k}\ dt = \int_0^1 t^n (1-t)^p \omega(t)\ dt.$$

c) Cependant $t \mapsto t^n(1-t)^p\omega(t)$ est continue, positive sur $[0,1]$; il en découle que $(-1)^p(\Delta^p u)_n \geq 0$, et que si cette quantité était nulle, alors $\forall t \in [0,1], t^n(1-t)^p\omega(t) = 0$. En particulier, on aurait $\forall t \in]0,1[, \omega(t) = 0$ et par continuité : $\forall t \in [0,1], \omega(t) = 0$, ce qui est exclu par hypothèse. Ainsi : $\forall (p,n) \in \mathbb{N}^2, (-1)^p(\Delta^p u)_n > 0$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est complètement monotone.
d) Pour tout $t \in [0,1]$, on peut développer (puisque $0 \leq \frac{1-t}{2} \leq \frac{1}{2}$) :

$$\frac{1}{1+t} = \frac{1}{2}\frac{1}{1-(\frac{1-t}{2})} = \frac{1}{2}\sum_{p=0}^{+\infty}(\frac{1-t}{2})^p.$$

donc

$$\int_0^1 \frac{\omega(t)}{1+t}\ dt = \int_0^1 \sum_{p=0}^{\infty} \left(\frac{1-t}{2}\right)^p \omega(t)\ dt$$

e) Définissons donc, pour $p \in \mathbb{N}$: $f_p : [0,1] \to \mathbb{R}$ par : $\forall t \in [0,1], f_p(t) = (\frac{1-t}{2})^p\omega(t)$. Chaque f_p est continue sur $[0,1]$, et on a de plus : $\forall t \in [0,1], |f_p(t)| \leq \frac{M}{2^p}$ (avec les notations du 5) a) . Ainsi, la série de fonctions continues $\sum f_p$ converge normalement sur $[0,1]$, et on peut intervertir :

$$\int_0^1 \frac{\omega(t)}{1+t}\ dt = \int_0^1 \sum_{p=0}^{+\infty} f_p(t)\ dt = \sum_{p=0}^{+\infty}\int_0^1 f_p(t)\ dt.$$

Compte-tenu du 5) a) , on a bien :

$$\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k u_k = \frac{1}{2}\sum_{p=0}^{+\infty}\int_0^1 (\frac{1-t}{2})^p\omega(t)\ dt.$$

f) Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on obtient, en développant le binôme $(1-t)^p$ et d'après 3) d) :

$$\int_0^1 (\frac{1-t}{2})^p\omega(t)\ dt = \frac{1}{2^p}\sum_{k=0}^{p}(-1)^k \begin{pmatrix} p \\ k \end{pmatrix} \int_0^1 t^k\omega(t)\ dt = \frac{(-1)^p}{2^p}\sum_{k=0}^{p}(-1)^{p-k}\begin{pmatrix} p \\ k \end{pmatrix} u_k = \frac{(-1)^p}{2^p}(\Delta^p u)_0.$$

D'où, d'après 3) e) :

$$\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k u_k = \sum_{p=0}^{+\infty}\frac{(-1)^p}{2^{p+1}}(\Delta^p u)_0.$$

6) Appliquons ce qui précède à $\omega : [0,1] \to \mathbb{R}$, définie par : $\forall t \in [0,1], \omega(t) = 1$
(qui vérifie bien les hypothèses)
On a :

- $\int_0^1 \frac{\omega(t)}{1+t}\ dt = \int_0^1 \frac{1}{1+t}\ dt = [\ln(1+t)]_0^1 = \ln 2$,
- $\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k u_k = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k+1}$,
- $\forall p \in \mathbb{N}, \int_0^1 (\frac{1-t}{2})^p\omega(t)\ dt = \int_0^1 (\frac{1-t}{2})^p\ dt = \frac{1}{(p+1)2^p}$ (effectuer le changement de variable $u = 1-t$).

D'après 5) , il vient :

$$\ln 2 = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1} = \sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(p+1)2^{p+1}}$$

Partie III.

Dans cette partie on se donne une suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que la série de terme général $(-1)^n u_n$ soit convergente et on note S sa somme.

7) En utilisant le théorème spécial des séries alternées il suffit que la suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tende vers 0 en décroissant pour que cela soit réalisé

Dans la suite on ne supposera pas la réalisation de la condition du 7) mais seulement l'hypothèse de convergence de la série de terme général $(-1)^n u_n$

Le but est de démontrer que

$$S = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k u_k = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{2^{p+1}}(\Delta^p(u))_0$$

8) a) La série $\sum(-1)^n u_n$ converge, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+k} = 0$.

Or, p étant fixé, le 3) d) fournit : $\forall n \in \mathbb{N}, (\Delta^p u)_n = \sum_{k=0}^{p}(-1)^{p-k}\begin{pmatrix} p \\ k \end{pmatrix} u_{n+k}$. D'où

$$\lim_{n\to+\infty}(\Delta^p u)_n = 0$$

b) La suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, donc est bornée : notons $R = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |r_n|$. Soit $\varepsilon > 0$; comme $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n = 0$, il existe $N_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_1, |r_n| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Alors, pour tout $p \geq N_1$, comme $\frac{1}{2^p}\sum_{k=N_1}^{p}\begin{pmatrix} p \\ k \end{pmatrix} \leq \frac{1}{2^p}\sum_{k=0}^{p}\begin{pmatrix} p \\ k \end{pmatrix} = 1$:

$$|\frac{1}{2^p}\sum_{k=0}^{p}\begin{pmatrix} p \\ k \end{pmatrix} r_k| \leq \frac{1}{2^p}\sum_{k=0}^{p}\begin{pmatrix} p \\ k \end{pmatrix}|r_k| \leq \frac{R}{2^p}\sum_{k=0}^{N_1-1}\begin{pmatrix} p \\ k \end{pmatrix} + \frac{1}{2^p}\sum_{k=N_1}^{p}\begin{pmatrix} p \\ k \end{pmatrix}\frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{R}{2^p}\sum_{k=0}^{N_1-1}\begin{pmatrix} p \\ k \end{pmatrix} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Or, N_1 étant fixé, la fonction $p \mapsto \sum_{k=0}^{N_1-1}\begin{pmatrix} p \\ k \end{pmatrix}$ est polynômiale en p (écrire $\begin{pmatrix} p \\ k \end{pmatrix} = \frac{p(p-1)\dots(p-k+1)}{k!}$), donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{R}{2^p}\sum_{k=0}^{N_1-1}\begin{pmatrix} p \\ k \end{pmatrix} = 0$. Ainsi, il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $p \geq N_2, |\frac{R}{2^p}\sum_{k=0}^{N_1-1}\begin{pmatrix} p \\ k \end{pmatrix}| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

Finalement, pour tout $p \geq \max(N_1, N_2), |\frac{1}{2^p}\sum_{k=0}^{p}\begin{pmatrix} p \\ k \end{pmatrix} r_k| \leq \varepsilon$, et

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2^p}\sum_{k=0}^{p}\begin{pmatrix} p \\ k \end{pmatrix} x r_k = 0$$

9) a) Soit $N \in \mathbb{N}$; notons

$$S_N = \sum_{p=0}^{N}[\frac{(-1)^p}{2^p}(\Delta^p u)_n - \frac{(-1)^{p+1}}{2^{p+1}}(\Delta^{p+1}u)_n] = \frac{(-1)^0}{2^0}(\Delta^0 u)_n - \frac{(-1)^{N+1}}{2^{N+1}}(\Delta^{N+1}u)_n = u_n - \frac{(-1)^{N+1}}{2^{N+1}}(\Delta^{N+1}u)_n.$$

Le3) b) permet d'écrire $\frac{(-1)^{N+1}}{2^{N+1}}(\Delta^{N+1}u)_n = \frac{(-1)^n}{2^{N+1}}\sum_{k=0}^{N+1}\begin{pmatrix} N+1 \\ k \end{pmatrix}(-1)^{n+k}u_{n+k}$. Or on vient de voir au 8) a) que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$: le 8) b) appliqué à la suite $((-1)^n u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ fournit alors $\lim\limits_{N\to+\infty}\frac{(-1)^{N+1}}{2^{N+1}}(\Delta^{N+1}u)_n = 0$; on en déduit que $\lim\limits_{N\to+\infty} S_N = u_n$, c'est-à-dire que la série $\sum_{p\geq 0}[\frac{(-1)^p}{2^p}(\Delta^p u)_n - \frac{(-1)^{p+1}}{2^{p+1}}(\Delta^{p+1}u)_n]$ converge, et

$$\sum_{p=0}^{+\infty}[\frac{(-1)^p}{2^p}(\Delta^p u)_n - \frac{(-1)^{p+1}}{2^{p+1}}(\Delta^{p+1}u)_n] = u_n$$

b) Notons, pour simplifier : $\forall n \in \mathbb{N}, w_n = (\Delta^p u)_n$. Soit $N \in \mathbb{N}$; notons également $\mathcal{U}_N = \sum_{n=0}^{N}(-1)^n(2(\Delta^p u)_n + (\Delta^{p+1}u)_n)$

$= \sum_{n=0}^{N}(-1)^n(2w_n + (\Delta w)_n)$. Comme $\forall n \in \mathbb{N}, 2w_n + (\Delta w)_n = w_{n+1} + w_n$, on a :

$$\mathcal{U}_N = \sum_{n=0}^{N}(-1)^n w_{n+1} + \sum_{n=0}^{N}(-1)^n w_n = \sum_{n=1}^{N+1}(-1)^{n-1} w_n + \sum_{n=0}^{N}(-1)^n w_n = (-1)^N w_{N+1} + w_0.$$

Or, p étant fixé, le 8) a) montre que $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 0$, donc $\lim\limits_{N\to+\infty} \mathcal{U}_N = w_0 = (\Delta^p u)_0$. Il s'ensuit que la série $\sum_{n\geq 0}(-1)^n(\frac{(-1)^p}{2^p}(\Delta^p u)_n - \frac{(-1)^{p+1}}{2^{p+1}}(\Delta^{p+1}u)_n)$ converge, et

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n(\frac{(-1)^p}{2^p}(\Delta^p u)_n - \frac{(-1)^{p+1}}{2^{p+1}}(\Delta^{p+1}u)_n) = \frac{(-1)^p}{2^{p+1}}(\Delta^p u)_0$$

10) a) On pose pour tout naturel n

$$E_n = \sum_{p=0}^{n} \frac{(-1)^p}{2^{p+1}}(\Delta^p(u))_0$$

D'après la question précédente,

$$E_n = \sum_{p=0}^{n}\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k(\frac{(-1)^p}{2^p}(\Delta^p u)_k - \frac{(-1)^{p+1}}{2^{p+1}}(\Delta^{p+1}u)_k)$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\sum_{p=0}^{n}(\frac{(-1)^p}{2^p}(\Delta^p u)_k - \frac{(-1)^{p+1}}{2^{p+1}}(\Delta^{p+1}u)_k) = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k(u_k - \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}(\Delta^{n+1}u)_k)$$

Comme $\sum_{k\geq 0}(-1)^k u_k$ converge, ce qui précède montre que $\sum_{k\geq 0}\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}(\Delta^{n+1}u)_k$ aussi, et, d'après 3) b) :

$$E_n - S = \frac{-1}{2^{n+1}}\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^{n+1+k}(\Delta^{n+1}u)_k = \frac{-1}{2^{n+1}}\sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{p=0}^{n+1}(-1)^{k+p}\begin{pmatrix} n+1 \\ p \end{pmatrix} u_{k+p}$$

$$= \frac{-1}{2^{n+1}}\sum_{p=0}^{n+1}\begin{pmatrix} n+1 \\ p \end{pmatrix}\sum_{k=p}^{+\infty}(-1)^k u_k$$

b) Posons, pour $n \in \mathbb{N}^*, R_n = \sum_{k=n}^{+\infty}(-1)^k u_k$; en tant que reste d'une série convergente, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} R_n = 0$.

On peut alors appliquer le 8) b) : $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{2^{n+1}}\sum_{p=0}^{n+1}\begin{pmatrix} n+1 \\ p \end{pmatrix} R_p = 0$, d'où aussi $\lim\limits_{n\to+\infty} E_n - S = 0$, *i.e.*

$$S = \sum_{p=0}^{+\infty}\frac{(-1)^p}{2^{p+1}}(\Delta^p u)_0$$

11) Soit $b \in]0,1[$. Dans cette question on pose pour tout naturel n , $u_n = b^n$.

La série de terme général $(-1)^n u_n$ est convergente par le théorème de séries alternées.

On a donc par le résultat démontré :

$$S = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k u_k = \sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^p}{2^{p+1}}(\Delta^p(u))_0$$

$$S = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k b^k = \sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{2^{p+1}}(1-b)^p$$

que l'on aurait pu démontrer directement en calculant les sommes des deux séries géométriques...