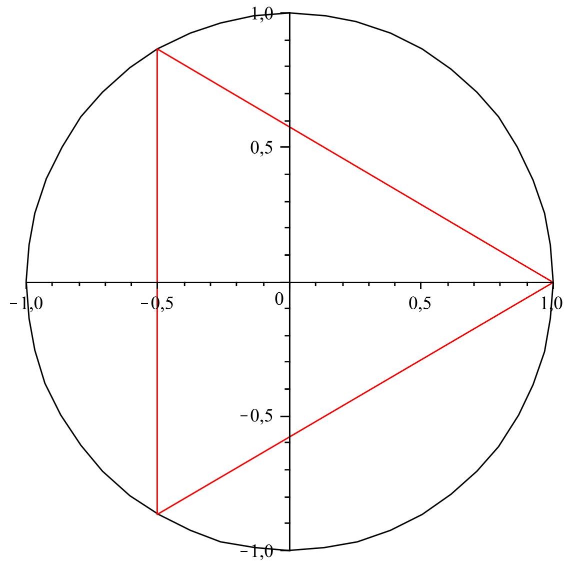
CCP PSI

un corrigé.

Partie 1.



1.1

On a $P = (1, 0)$, $Q = (-1/2, \sqrt{3}/2)$ et $R = (-1/2, -\sqrt{3}/2)$. On en déduit que

$$(PQ)\ : y = -\frac{1}{\sqrt{3}}(x-1)$$

$$(PR)\ : y = \frac{1}{\sqrt{3}}(x-1)$$

$$(QR)\ :\ x = -1/2$$

sont les équations des droites (PQ), (PR) et (QR). Les équations cartésiennes des côtés sont les mêmes, avec une contrainte supplémentaire : $x \in [-1/2, 1]$ pour PQ et PR et $y \in [-\sqrt{3}/2, \sqrt{3}/2]$ pour (QR).
Une droite d'équation $ax+by+c = 0$ découpe le plan en deux parties : l'une où $ax+by+c > 0$ et l'autre où $ax + by + c < 0$. En testant en l'origine, on sait quelle partie correspond à quel signe. On trouve alors immédiatement que $M(x + iy) \in T$ si et seulement si

$$2x + 1 > 0,\ \ x - \sqrt{3}y - 1 < 0,\ \ x + \sqrt{3}y - 1 < 0$$

1.2.1 Avec la propriété (2), on a immédiatement $(1, 1, 1)$ qui est vecteur propre de A associé à la valeur propre 1.

1.2.2 Toute matrice étant trigonalisable sur $\mathbb{C}$, la trace (qui et un invariant de similitude) est égale à la somme des valeurs propres comptées avec leurs multiplicités. Ainsi,

$$\mathrm{Tr}(A) = 1 + \lambda + \overline{\lambda} = 1 + 2a$$

A^2 est, elle, semblable à une matrice triangulaire dont les coefficients sont les carrés des valeurs propres de A et de même

$$\mathrm{Tr}(A^2) = 1 + \lambda^2 + \overline{\lambda}^2 = 1 + 2(a^2 - b^2)$$

1.2.3 $\mathrm{Tr}(A) > 0$ découle de la propriété (1) (la trace est > 0 comme somme des coefficients diagonaux qui sont > 0).
On a $(A^2)_{i,i} = \sum_{k=1}^{3} a_{i,k}a_{k,i} > a_{i,i}^2$ (toujours avec (1)) et donc $\mathrm{Tr}(A^2) > a_{1,1}^2 + a_{2,2}^2 + a_{3,3}^3$.
L'inégalité de Schwarz donne $(u|v)^2 \leq \|u\|^2\|v\|^2$ ce qui s'écrit, avec les vecteurs proposés

$$(\mathrm{Tr}(A))^2 = (a_{1,1} + a_{2,2} + a_{3,3})^2 = (u|v)^2 \leq 3(a_{1,1}^2 + a_{2,2}^2 + a_{3,3})^2 < 3\mathrm{Tr}(A^2)$$

1.2.4 Avec les expressions obtenues en **1.2.2** on a donc

$$1 + 2a = \mathrm{Tr}(a) > 0$$

$$0 < \mathrm{Tr}(A^2) - (\mathrm{Tr}(A))^2 = 2(1 + a^2 - 3b^2 - 2a) = (a - \sqrt{3}b - 1)(a + \sqrt{3}b - 1)$$

1.2.5 La condition $2a + 1 > 0$ indique que $M(\lambda)$ est à droite du côté (QR).

La condition $(a - \sqrt{3}b - 1)(a + \sqrt{3}b - 1) > 0$ indique que soit $M(\lambda)$ est au dessus de PR et en dessous de PQ soit l'inverse. Or, le second quart de plan est entièrement hors de D (comme le montre le dessin par exemple). $M(\lambda)$ est donc dans le premier quart de plan et on a $(a - \sqrt{3}b - 1) < 0$ et $(a + \sqrt{3}b - 1) < 0$. La question **1.1** nous permet d'affirmer que

$$M(\lambda) \in T$$

1.3.1 $2r\cos(\theta) = \lambda + \overline{\lambda}$ donne immédiatement

$$\alpha = \frac{1 + 2r\cos(\theta)}{3}$$

$j\lambda + j^2\overline{\lambda} = j\lambda + \overline{j\lambda} = 2\mathrm{Re}(j\lambda) = 2r\cos(\theta + 2\pi/3)$ et ainsi

$$\beta = \frac{1 + 2r\cos(\theta + \frac{2\pi}{3})}{3}$$

Enfin, on a de même $j^2\lambda + j\overline{\lambda} = 2\mathrm{Re}(j^2\lambda) = 2r\cos(\theta + 4\pi/3) = -2r\cos(\theta + \frac{\pi}{3})$ et donc

$$\gamma = \frac{1 - 2r\cos(\theta + \frac{\pi}{3})}{3}$$

1.3.2 On a immédiatement $\alpha + \beta + \gamma = 1$ car $1 + j + j^2 = 0$. A vérifie donc la propriété (2).

Par ailleurs, $M(\lambda) \in T$ donne $\lambda + \overline{\lambda} = 2\mathrm{Re}(\lambda) > -1$ et donc $\alpha > 0$.

De même, $j\lambda + j^2\overline{\lambda} = 2\mathrm{Re}(j\lambda) = -\mathrm{Re}(\lambda) - \sqrt{3}\mathrm{Im}(\lambda) > -1$ (avec **1.1**) et $\beta > 0$.

Enfin, $\gamma > 0$ s'obtient de même avec la troisième condition vue en **1.1**.

Finalement, A vérifie aussi (1) et donc la propriété $(ST > 0)$.

1.3.3 Le calcul donne

$$J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad J^3 = I_3$$

$X^3 - 1$ annulant J, les valeurs propres de J sont racines de $X^3 - 1$ et ne peuvent valoir que $1, j, j^2$. Si on trouve un vecteur propre pour chacune de ces potentielles valeurs, on aura le spectre et on pourra affirmer (les sous-espaces propres étant en somme directe) que les sous-espaces propres sont de dimension 1. On trouve que $(1, 1, 1)$, $(1, j, j^2)$ et $(1, j^2, j)$ conviennent. Ainsi,

$$\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(J) = \{1, j, j^2\},\ E_1(J) = \mathrm{Vect}((1, 1, 1)),\ E_j(J) = \mathrm{Vect}((1, j, j^2)),\ E_{j^2}(J) = \mathrm{Vect}((1, j, j^2))$$

1.3.4 On a immédiatement

$$A = \alpha I_3 + \beta J + \gamma J^2 = P(J) \ \text{ avec } \ P = \alpha + \beta X + \gamma X^2$$

Comme J est diagonalisable, il existe une matrice inversible Q telle que $Q^{-1}JQ = \mathrm{diag}(1, j, j^2)\Delta$. Une récurrence simple indique que pour tout entier naturel p, $Q^{-1}J^pQ = \Delta^p$. On en déduit, par combinaisons linéaires, que

$$Q^{-1}AQ = Q^{-1}P(J)Q = P(Q^{-1}JQ) = \mathrm{diag}(P(1), P(j), P(j^2))$$

Les valeurs propres de A sont donc (avec $1 + j + j^2 = 0$ et les formules de **1.3.1**)

$$P(1) = 1,\ P(j) = \lambda \ \text{ et } \ P(j^2) = \overline{\lambda}$$

Partie 2.

2.1 La i-ième coordonnée de AU est $\sum_{j=1}^n a_{i,j}u_j = \sum_{j=1}^n a_{i,j} = 1$ d'après (2). On en déduit que

$$AU = U$$

c'est à dire que U est vecteur propre de A associé à la valeur propre 1 (U étant non nul).

2.2.1 Comme $BX = 0$, sa k-ième coordonnée est nulle $\sum_{j=1}^n b_{k,j}x_j = 0$ ce qui donne

$$b_{k,k}x_k = -\sum_{j\neq k} b_{k,j}x_j$$

L'inégalité triangulaire donne (avec la définition de k)

$$|b_{k,k}||x_k| \leq \sum_{j\neq k} |b_{k,j}||x_j| \leq |x_k| \sum_{j\neq k} |b_{k,j}|$$

Comme $|x_k| > 0$ (X n'est pas nul), on en déduit l'inégalité demandée.

2.2.2 $B = A - \lambda I_n$ est bien non inversible (puisque λ est valeur propre) et la question précédente donne (les coefficients non diagonaux de B étant ceux de A)

$$|a_{k,k} - \lambda| \leq \sum_{j\neq k} |a_{k,j}|$$

Avec la propriété ($ST > 0$) on a donc

$$|a_{k,k} - \lambda| \leq \sum_{j\neq k} a_{k,j} - a_{k,k} = 1 - a_{k,k}$$

Avec la seconde forme de l'inégalité triangulaire, on en déduit que $|\lambda| - a_{k,k} \leq 1 - a_{k,k}$ et donc que

$$|\lambda| \leq 1$$

2.2.3 Si $|\lambda| = 1$, on a égalité ci-dessus et on doit donc avoir égalité dans l'inégalité triangulaire c'est à dire avoir $1 - a_{k,k} = |\lambda| - a_{k,k} = |\lambda - a_{k,k}| = |e^{i\theta} - a_{k,k}|$. En élevant cette identité au caré, on obtient après simplification $-2a_{k,k} = -2\cos(\theta)a_{k,k}$. Comme $a_{k,k} \neq 0$, on a $\cos(\theta) = 1$ et donc

$$\lambda = 1$$

2.3.1 Le déterminant est invariant par transposition et donc A et A^T ont mêmes valeurs propres (puisque même polynôme caractéristique). En particulier, $1 \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A^T)$.
Le rang est aussi invariant par transposition (le rang d'une matrice est égal au rang de ses colonnes ou de ses lignes). Les images de $A - I_n$ et de $A^T - I_n$ ont donc même dimension. Par théorème du rang, on a alors

$$\dim(E_1(A)) = n - \mathrm{rg}(A - I_n) = n - \mathrm{rg}(A^T - I_n) = \dim(E_1(A^T))$$

2.3.2 La i-ième coordonnée de A^TV est $\sum_{j=1}^n a_{j,i}v_j$. Elle vaut aussi v_i (car $A^TV = V$). Par inégalité triangulaire, on en déduit que

$$|v_i| = \left|\sum_{j=1}^n a_{j,i}v_j\right| \leq \sum_{j=1}^n |a_{j,i}v_j| = \sum_{j=1}^n a_{j,i}|v_j|$$

En sommant ces inégalités, on a donc

$$\sum_{i=1}^n |v_i| \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{j,i}|v_j| = \sum_{j=1}^n \left(|v_j| \sum_{i=1}^n a_{j,i}\right)$$

Avec la propriété (2), cette ingéalité est une égalité. Toutes les inégalités intermédiaires sont donc aussi (par exemple par l'absurde) des égalité. On a donc

$$\forall i,\ |v_i| = \sum_{j=1}^{n} a_{j,i}|v_j|$$

Ceci signifie exactement que $A^T|V| = |V|$ (pour tout i, les deux vecteurs ont même i-ième coordonnée). Si, par l'absurde, il existait un i tel que $|v_i| = 0$ alors on aurait $0 = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}|v_j|$ ce qui donnerait la nullité pour tout j de $a_{i,j}|v_j|$ (une somme de suantité positives n'est nulle que si toutes les quantités sont nulles) et donc de tous les v_j (propriété (1)). Ceci contrdit $V \neq 0$. Ainsi

$$\forall i,\ |v_i| > 0$$

2.3.3 Y étant un élément non nul de $E_1(A^T)$, on a $\forall i,\ y_i \neq 0$. On peut en particulier poser $Z = X - \frac{x_1}{y_1}Y$. C'est un élément de $E_1(A^T)$ dont la première coordonnée est nulle. Avec la question précédente (en contraposant), c'est donc le vecteur nul. X est donc mutliple de Y et

$$\dim(E_1(A^T)) = 1$$

Soit V un vecteur non nul de $E_1(A^T)$ et $\Omega = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n}|v_i|}|V|$. Ω est un élément de $E_1(A^T)$ (question **2.3.2**) dont les coordonnées sont > 0 à somme égale à 1.
Ω est le seul élément ayant ces propriétés car tout autre élément de $E_1(A^T)$ est multiple de Ω (et la somme des coordonnées est multiple dans le même rapport).
Enfin, $A^T\Omega = \Omega$ s'écrit

$$\forall i,\ \sum_{j=1}^{n} a_{j,i}\omega_j = \omega_i$$

2.3.4 Les valeurs propres de A sont en module plus petites que 1 et la seule de module 1 est 1. De plus, $E_1(A)$ est de dimension 1 et une base en est $(1, \dots, 1)$.
Les valeurs propres de A^T sont en module plus petites que 1 et la seule de module 1 est 1. De plus, $E_1(A^T)$ est de dimension 1 et les coordonnées d'un vecteur propres sont toutes > 0 ou toutes < 0.

2.4. N est positive, vérifie l'axiome de séparation ($N(X) = 0 \Rightarrow X = 0$ car les ω_i sont > 0), est homogène ($N(\lambda X) = |\lambda|N(X)$) et vérifie l'inégalité triangulaire ($N(X+Y) \leq N(X) + N(Y)$ est conséquence de l'ingéalité triangulaire dans $\mathbb{C}$). N est donc une norme.
Posons $Y = AX$; on a $y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j$ et donc (avec la dernière égalité de **2.3.3**)

$$N(AX) = \sum_{i=1}^{n}\omega_i\left|\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j\right| \leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\omega_i a_{i,j}|x_j| = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}\omega_i\right)|x_j| = \sum_{j=1}^{n}\omega_j|x_j| = N(X)$$

Si λ est une valeur propre de A et X un vecteur propre associé, on a donc $|\lambda|N(X) = N(\lambda X) = N(AX) \leq N(X)$ et donc (puisque $N(X) > 0$, X étant non nul) $|\lambda| \leq 1$. On retrouve

$$\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \subset \{z/\ |z| \leq 1\}$$

2.5.1 Le même calcul que ci-dessus (mais sans les modules et donc avec des égalités) donne immédiatement $\Phi(AX) = \Phi(X)$.

2.5.2 Si $X \in \ker(\Phi) \cap E_1(A)$ alors $X \in \mathrm{Vect}(U)$ et $\Phi(X) = 0$. Il existe donc $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $X = \lambda U$ et $0 = \Phi(X) = \Phi(\lambda U) = \lambda\sum\omega_i = \lambda$. Donc $X = 0$. $E_1(A)$ et $\ker(\Phi)$ sont ainsi en somme directe.
Par ailleurs, $\dim(E_1(A)) = 1$ et $\dim(\ker(\Phi)) = n - 1$ (le noyau d'une forme linéaire non nulle est un hyperplan). La somme de ces dimensions est égale à la dimension de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$.
Des deux arguments précédents, on tire

$$\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) = E_1(A) \oplus \ker(\Phi)$$

2.5.3 On suppose $AX = \lambda X$ et $\lambda \neq 1$. On a alors $\Phi(X) = \Phi(AX) = \Phi(\lambda X) = \lambda\Phi(X)$. $\lambda \neq 1$ indique que $\Phi(X) = 0$ c'est à dire que $X \in \ker(\Phi)$.

2.5.4 Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ canoniquement associé à A. **2.5.1** montre que $\ker(\Phi)$ est stable par f (si $\Phi(X) = 0$ alors $\Phi(AX) = 0$). $E_1(A)$ est aussi stable par f. Dans une base adaptée à la décomposition de **2.5.2**, la matrice de f est bloc-diagonale du type $\text{diag}(1, B)$. Si 1 était valeur propre de B alors $E_1(A)$ serait de dimension ≥ 2 (on aurait deux vecteurs propres de f indépendants, l'un étant dans $E_1(A)$ et l'autre dans $\ker(\Phi)$) ce qui est exclus. 1 n'est donc pas racine de χ_B. Or $\chi_f = (1 - X)\chi_B$ (déterminant diagonal par blocs) et 1 est donc racine simple de χ_f.

Finalement, la valeur propre 1 est de multiplicité 1.