Centrale 2012, filière MP, seconde épreuve

Éléments de correction proposés par M. Carré, Lycée Joffre, Montpellier.

Partie I

A. $J_x \neq \emptyset$ car $0 \in J_x$.
L'ensemble des de degrés des polynômes de J_x est une partie de $\mathbb{N}$ non vide donc contient un plus petit élément correspondant à un certain polynôme de J_x.
Quitte le diviser par son coefficient dominant on peut le supposer unitaire. Notons le B.
Remarquons immédiatement que tout multiple de B est dans J_x.
Réciproquement si A dans dans J_x alors en effectuant sa division euclidienne par B, $A = BQ + R$ le polynôme R est aussi dans J_x.
Par minimalité du degré de B, on a donc $R = 0$.
J_x est donc l'ensemble des multiples de B.
Si un autre polynôme B_1 convient alors B et B_1 se divisent mutuellement donc comme il sont unitaires ils sont égaux.

B.1) La seule SRL d'ordre 0 est la suite nulle.
Les SRL d'ordre 1 sont les suites géométriques.
$(X-1)^2 \in J_x$ ssi $x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc ssi x est de la forme $n \mapsto an+b$ et $X-1 \in J_x$ ssi x est constante. Les SRL dont le polynôme minimal est $(X-1)^2$ sont donc les suites de la forme $n \mapsto an+b$ avec $(a,b) \in \mathbb{K}^* \times \mathbb{K}$; autrement dit, ce sont les suites arithmétiques non constantes.

B.2) $(X+1)^3 \in J_x$, donc le polynôme minimal de x est de la forme $(X+1)^k$, avec $k \in [[0,3]]$.
x n'est pas une suite géométrique de raison -1, donc $k \geq 2$.
On vérifie immédiatement par récurrence que $x_{n+2} + 2x_{n+1} + x_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
On en conclut que le polynôme minimal de x est $(X+1)^2$ et que l'ordre minimal de x est 2.

C.1) $\mathcal{R}_A(\mathbb{K}) = \mathrm{Ker} A(\sigma)$ donc $\mathcal{R}_A(\mathbb{K})$ est un sous-e.v. de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et il est stable par σ car σ et $A(\sigma)$ commutent. L'application linéaire $R_A(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}^p : x \mapsto (x_0, x_1, \ldots, x_{p-1})$ est clairement bijective, donc $\dim \mathcal{R}_A(\mathbb{K}) = \dim \mathbb{K}^p = p$.

C.2) $x \in \mathcal{R}_{X^p}(\mathbb{K})$ ssi $x_n = 0$ pour $n \geq p$ donc la famille $(e_k)_{0 \leq k \leq p-1}$, où $e_k = (\delta_{k,n})_{n \in \mathbb{N}}$, est une base de $\mathcal{R}_{X^p}(\mathbb{K})$.

C.3) a) L'application $\psi : \mathbb{K}_{p-1}[X] \to \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : Q \mapsto (Q(n)\, \lambda^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est linéaire, injective (car si $Q \in \mathrm{Ker}\psi$ alors Q s'annule sur $\mathbb{N}$, donc est nul) et $\mathrm{Im}\psi = E_A(\mathbb{K})$. Il en résulte que $E_A(\mathbb{K})$ est un sous-e.v. de dimension p de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

b) Notons $A_p = (X-\lambda)^p$. Selon C.1) et a), $\mathcal{R}_{A_p}(\mathbb{K})$ et $E_{A_p}(\mathbb{K})$ sont de dimension p ; il suffit donc de montrer que $E_{A_p}(\mathbb{K}) \subset \mathcal{R}_{A_p}(\mathbb{K})$, ce que l'on va faire par récurrence sur p.
Pour $p = 1$ c'est évident : $\mathcal{R}_{X-\lambda}(\mathbb{K})$ est l'ensemble des suites géométriques de raison λ, *i.e.* $E_{X-\lambda}(\mathbb{K})$.
Supposons l'inclusion démontrée au rang p et considérons $x \in E_{A_{p+1}}(\mathbb{K}) : x_n = Q(n)\, \lambda^n$, avec $Q \in \mathbb{K}_p[X]$.
Posons $y = A_1(\sigma)(x) = (\sigma - \lambda \mathrm{Id})(x)$. On a $A_{p+1}(\sigma)(x) = (A_p A_1)(\sigma)(x) = \big(A_p(\sigma) \circ A_1(\sigma)\big)(x) = A_p(\sigma)(y)$.
D'autre part, $y_n = x_{n+1} - \lambda x_n = Q(n+1)\, \lambda^{n+1} - \lambda Q(n)\, \lambda^n = \lambda\big(Q(n+1) - Q(n)\big)\, \lambda^n$.
Le polynôme $\lambda\big(Q(X+1) - Q(X)\big)$ est de degré inférieur ou égal à $p-1$ donc, par hypothèse de récurrence, $y \in \mathcal{R}_{A_p}(\mathbb{K})$ et par conséquent $x \in \mathcal{R}_{A_{p+1}}(\mathbb{K})$.

D. Notons $\lambda_0 = 0$. Les polynômes $A_k = (X - \lambda_k)^{m_k}$, avec $0 \leq k \leq d$, sont deux à deux premiers entre eux donc, d'après le théorème des noyaux, $\mathrm{Ker} A(\sigma) = \bigoplus_{k=0}^{d} \mathrm{Ker} A_k(\sigma)$, c'est-à-dire $\mathcal{R}_A(\mathbb{K}) = \bigoplus_{k=0}^{d} \mathcal{R}_{A_k}(\mathbb{K})$.
On a vu en C.2) que $\mathcal{R}_{A_0}(\sigma)$ est l'ensemble des suites nulles à partir du rang m_0 (y compris si $m_0 = 0$) et en C.3) que pour $k \in [[1,d]]$, $\mathcal{R}_{A_k}(\sigma)$ est l'ensemble des suites de la forme $n \mapsto Q(n)\, \lambda_k^n$ avec $Q \in \mathbb{K}_{m_k - 1}[X]$. Il en résulte aussitôt que $\mathcal{R}_A(\mathbb{K})$ est l'ensemble des suites de la forme indiquée dans l'énoncé.

Partie II

A.1) $x \in \mathcal{R}_B(\mathbb{K})$ donc, d'après **I.**C.1), $\sigma^k(x) \in \mathcal{R}_B(\mathbb{K})$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
Soient $a_0, \dots, a_{p-1} \in \mathbb{K}$ tels que $\sum\limits_{k=0}^{p-1} a_k\, \sigma^k(x) = 0$. Le polynôme $A = \sum\limits_{k=0}^{p-1} a_k X^k$ appartient à J_x, il est donc multiple de B, mais $\deg A < p = \deg B$, donc $A = 0$ et les a_k sont tous nuls.
$\big(\sigma^k(x)\big)_{0\le k\le p-1}$ est donc une famille libre de cardinal p de l'e.v. $\mathcal{R}_B(\mathbb{K})$ qui est de dimension p (*cf* **I.**C.1)) ; c'est par conséquent une base de $\mathcal{R}_B(\mathbb{K})$.

Pour $n \le p$, $\big(\sigma^k(x)\big)_{0\le k\le n-1}$ est libre en tant que sous-famille d'une famille libre, donc est de rang n.
Pour $n \ge p$, $\big(\sigma^k(x)\big)_{0\le k\le n-1}$ est génératrice de $\mathcal{R}_B(\mathbb{K})$ en tant que sur-famille d'une famille génératrice, donc est de rang $\dim \mathcal{R}_B(\mathbb{K}) = p$.

A.2) Une suite de $\mathcal{R}_B(\mathbb{K})$ est entièrement déterminée par ses p premiers termes, et *a fortiori* par ses n premiers termes (puisque $n \ge p$) ; φ_n est donc injective. D'autre part, φ_n est évidemment linéaire.

Selon A.1), la famille $\big(\sigma^k(x)\big)_{0\le k\le n-1}$ est de rang p donc, par injectivité de φ_n, son image par φ_n est aussi de rang p. Or, $\Big(\varphi_n\big(\sigma^k(x)\big)\Big)_{0\le k\le n-1}$ est la famille des vecteurs-colonne de $H_n(x)$; par conséquent, $\operatorname{rg}\big(H_n(x)\big) = p$.

B.1) On sait que m est supérieur ou égal à l'ordre minimal de x donc, d'après A.2), le rang de $H_m(x)$, c'est-à-dire p, est égal à l'ordre minimal de x.
Toujours d'après A.2), $\operatorname{rg}\big(H_{p+1}(x)\big) = p$, donc par le théorème du rang, $\operatorname{Ker}\big(H_{p+1}(x)\big)$ est une droite vectorielle.
Soit $b = (b_0, \dots, b_{p-1}, b_p)$ une base de cette droite vectorielle ; si b_p était nul, $(b_0, \dots, b_{p-1})$ serait un vecteur non nul de $\operatorname{Ker}\big(H_p(x)\big)$, ce qui est impossible puisque $H_p(x)$ est inversible ; donc $b_p \ne 0$ et, quitte à remplacer b par b/b_p, on peut supposer que $b_p = 1$.

B.2) L'égalité $H_{p+1}(x)\begin{pmatrix} b_0 \\ \vdots \\ b_{p-1} \\ 1 \end{pmatrix} = 0$ se traduit par $b_0 \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} + \dots + b_{p-1}\begin{pmatrix} x_{p-1} \\ \vdots \\ \vdots \\ x_{2p-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_p \\ \vdots \\ \vdots \\ x_{2p} \end{pmatrix} = 0$, soit encore par $\sum\limits_{k=0}^{p} b_k\, \varphi_{p+1}\big(\sigma^k(x)\big) = 0$ (où $b_p = 1$), et enfin par $\varphi_{p+1}\left(\sum\limits_{k=0}^{p} b_k\, \sigma^k(x)\right) = 0$.
Comme φ_{p+1} est injective, $\sum\limits_{k=0}^{p} b_k\, \sigma^k(x) = 0$; le polynôme minimal de x divise donc le polynôme $B = \sum\limits_{k=0}^{p} b_k X^k$.
Ces deux polynômes étant unitaires de degré p, ils sont égaux.

C.1) On écrit une fonction Python .

```
def suite(n):
     L=[ 1,1,1,0]
     for k in range(4,n+1):
             x=L[-1]-2*L[-3]
             L.append(x)
     return(L)
```

C.2) On calcule $x_4 = -2$ et $x_5 = x_6 = -4$, d'où $H_4(x) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & -2 & -4 & -4 \end{pmatrix}$.

On constate ensuite que $\operatorname{rg}\big(H_4(x)\big) = 3$. Comme x est par construction une SRL d'ordre 4, la question B.1) montre que l'ordre minimal de x est 3 et la question A.2) que $\operatorname{rg}\big(H_n(x)\big) = 3$ pour tout $n \ge 3$.

Par ailleurs, on a directement $\operatorname{rg}\big(H_1(x)\big) = \operatorname{rg}\big(H_2(x)\big) = 1$.

C.3) On trouve $\operatorname{Ker}(H_4(x)) = \operatorname{Vect}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc, d'après B.1), le polynôme minimal de x est $X^3 - 2X^2 + 2X$ et la relation de récurrence minimale de x est : $\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+3} - 2x_{n+2} + 2x_{n+1} = 0$.

C.4) $X^3 - 2X^2 + 2X = X(X-1-i)(X-1+i)$. On peut appliquer **I**.D en prenant $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et on en déduit que, pour $n \geq 1$, x_n est de la forme $\alpha(1+i)^n + \beta(1-i)^n$, où α et β sont deux constantes complexes.
Avec $x_1 = x_2 = 1$ on trouve $\alpha = \dfrac{1-i}{4}$ et $\beta = \dfrac{1+i}{4}$ donc, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$x_n = \frac{(1-i)(1+i)^n + (1+i)(1-i)^n}{4} = \frac{(1+i)^{n-1} + (1-i)^{n-1}}{2} = \Re\big((1+i)^{n-1}\big) = (\sqrt{2})^{n-1}\cos\frac{(n-1)\pi}{4}\cdot$$

C.5) Changer x_0 ne modifie pas les x_n pour $n \geq 1$. La nouvelle suite x appartient donc toujours à $\mathcal{R}_{X^3-2X^2+2X}(\mathbb{K})$.

On a maintenant $H_3(x) = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ et on constate que $\operatorname{rg}\big(H_3(x)\big) = 2$.
On en déduit que l'ordre minimal de x est 2 et que $\operatorname{rg}\big(H_n(x)\big) = 2$ pour tout $n \geq 2$. Evidemment, $\operatorname{rg}\big(H_1(x)\big) = 1$.

Ensuite, on trouve $\operatorname{Ker}\big(H_3(x)\big) = \operatorname{Vect}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, donc le polynôme minimal de x est $X^2 - 2X + 2$ et sa relation de récurrence minimale est : $\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+2} - 2x_{n+1} + 2x_n = 0$.

Partie III

A.1) Une matrice de Hankel est symétrique réelle, donc (ortho-)diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$; en particulier, elle possède n valeurs propres réelles comptées avec leur ordre de multiplicité.

A.2) Par l'absurde, supposons qu'il existe $a \in \mathbb{R}^{2n-1}$ tel que $\operatorname{Spo}\big(H(a)\big) = (\lambda, \lambda, \ldots, \lambda)$.
Comme $H(a)$ est diagonalisable, on aurait $H(a) = \lambda I_n$, d'où $a_0 = \lambda$ et $a_k = 0$ pour $1 \leq k \leq n-1$ d'après la première colonne et $a_2 = \lambda$ d'après la deuxième colonne ; c'est impossible puisque $n \geq 3$ et $\lambda \neq 0$.

B.1) $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i = \operatorname{tr}(M) = \sum\limits_{k=1}^{n} m_{k,k} = \sum\limits_{k=0}^{n-1} a_{2k}$.

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 = \operatorname{tr}\left(M^2\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} m_{i,j}m_{j,i}\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{i+j-2}^2\right) = \sum_{0 \leq i,j \leq n-1} a_{i+j}^2.$$
$$= \sum_{k=0}^{2n-2}\left(\sum_{0 \leq i,j \leq n-1,\, i+j=k} a_k^2\right) = \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)\,a_k^2 + \sum_{k=n}^{2n-2}(2n-k-1)\,a_k^2.$$

(En effet, pour $k \in [[0,\, n-1]]$ (resp. $k \in [[n,\, 2n-2]]$), il existe $k+1$ (resp. $2n-k-1$) couples $(i,j) \in [[0,\, n-1]]^2$ tels que $i + j = k$.)

B.2) $\langle v, w\rangle = \sum\limits_{i=1}^{n} v_i w_i = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{2i-2} = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i$ d'après B.1).

$$\|v\|^2 = \sum_{i=1}^{n} v_i^2 = \sum_{i=1}^{p}(2i-1)\,a_{2i-2}^2 + \sum_{i=p+1}^{n}(2n-2i+1)\,a_{2i-2}^2 = \sum_{i=0}^{p-1}(2i+1)\,a_{2i}^2 + \sum_{i=p}^{n-1}(2n-2i-1)\,a_{2i}^2$$
$$\leq \sum_{k=0}^{2p-2}(k+1)\,a_k^2 + \sum_{k=2p}^{2n-2}(2n-k-1)\,a_k^2 \leq \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)\,a_k^2 + \sum_{k=n}^{2n-2}(2n-k-1)\,a_k^2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 \text{ d'après B.1).}$$

(La première majoration est grossière (on a ajouté les termes d'indice impair, qui sont positifs) et la seconde est justifiée par les inégalités $2p - 2 \leq n - 1$ et $2p \geq n$.)

B.3) $\sum_{1\le i<j\le n}(\lambda_i-\lambda_j)^2=\frac{1}{2}\sum_{1\le i,j\le n}(\lambda_i-\lambda_j)^2=\frac{1}{2}\sum_{1\le i,j\le n}(\lambda_i^2+\lambda_j^2-2\lambda_i\lambda_j)=\frac{1}{2}\left(n\sum_{i=1}^n\lambda_i^2+n\sum_{j=1}^n\lambda_j^2-2\sum_{i=1}^n\lambda_i\cdot\sum_{j=1}^n\lambda_j\right)$

$=n\sum_{i=1}^n\lambda_i^2-\left(\sum_{i=1}^n\lambda_i\right)^2=n\sum_{i=1}^n\lambda_i^2-\langle v,w\rangle^2$ d'après l'égalité du B.2).

L'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'inégalité du B.2) donnent alors :

$$\sum_{1\le i<j\le n}(\lambda_i-\lambda_j)^2\ge n\sum_{i=1}^n\lambda_i^2-\|v\|^2\|w\|^2\ge n\sum_{i=1}^n\lambda_i^2-\left(\sum_{i=1}^n\lambda_i^2\right)\|w\|^2=K_n\sum_{i=1}^n\lambda_i^2.$$

B.4) Pour $n=3$, $\|w\|^2=1+\frac{1}{3}+1=\frac{7}{3}$ et l'inégalité (III.1) devient $(\lambda_2-\lambda_1)^2+(\lambda_3-\lambda_1)^2+(\lambda_3-\lambda_2)^2\ge\frac{2}{3}(\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2)$, ce qui se réécrit $2(\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2)\ge 3(\lambda_1\lambda_2+\lambda_1\lambda_3+\lambda_2\lambda_3)$ après développement et regroupement.

C.1) B est diagonalisable et $\operatorname{rg}B=3$ de façon évidente donc, d'après le théorème du rang, 0 est valeur propre de B d'ordre $n-3$ (si $n\ge 4$).
D'autre part, en notant $(E_i)_{1\le i\le n}$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $BE_p=-2E_p$,, $B(E_1+E_{2p-1})=E_1+E_{2p-1}$ et $B(E_1-E_{2p-1})=-(E_1-E_{2p-1})$ donc le spectre ordonné de B est $(1,0,\dots,0,-1,-2)$.

C.2) Les seules colonnes de MB éventuellement non nulles sont les colonnes $1,p$ et $2p-1$ et les termes diagonaux correspondants sont $a_{2p-2},-2a_{2p-2}$ et a_{2p-2}, donc $\operatorname{tr}(MB)=0$.

L'application de (III.2) à M et B donne alors $-2\lambda_1-\lambda_2+\lambda_n\le 0\le\lambda_1-\lambda_{n-1}-2\lambda_n$.

D.1) On remarque que $a-c$ est valeur propre de M associée à $\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$. Cela va permettre de factoriser χ_M.

$\chi_M=X^3-(2a+c)X^2+(a^2-2b^2-c^2+2ac)X+c^3+2ab^2-a^2c-2b^2c=(X-a+c)\big(X^2-(a+2c)X-2b^2+c^2+ac\big)$.
On en déduit les valeurs propres de M : $a-c$, $\dfrac{a+2c+\sqrt{a^2+8b^2}}{2}$ et $\dfrac{a+2c-\sqrt{a^2+8b^2}}{2}$.

D.2) Cherchons $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ tel que $\dfrac{a+2c+\sqrt{a^2+8b^2}}{2}=\lambda_1$, $a-c=\lambda_2$ et $\dfrac{a+2c-\sqrt{a^2+8b^2}}{2}=\lambda_3$.

Cela équivaut à $\begin{array}{rcl}a+2c&=&\lambda_1+\lambda_3\\a-c&=&\lambda_2\\\sqrt{a^2+8b^2}&=&\lambda_1-\lambda_3\end{array}$ ou encore à $\begin{array}{rcl}a&=&\dfrac{\lambda_1+2\lambda_2+\lambda_3}{3}\\c&=&\dfrac{\lambda_1-\lambda_2+\lambda_3}{3}\\b^2&=&\dfrac{9(\lambda_1-\lambda_3)^2-(\lambda_1+2\lambda_2+\lambda_3)^2}{72}.\end{array}$

De plus, $9(\lambda_1-\lambda_3)^2-(\lambda_1+2\lambda_2+\lambda_3)^2=\big(3(\lambda_1-\lambda_3)+(\lambda_1+2\lambda_2+\lambda_3)\big)\big(3(\lambda_1-\lambda_3)-(\lambda_1+2\lambda_2+\lambda_3)\big)$
$=4(2\lambda_1+\lambda_2-\lambda_3)(\lambda_1-\lambda_2-2\lambda_3)\ge 0$, d'après les hypothèses.
Le système étudié possède donc une unique solution telle que $b\ge 0$.

D.3) On déduit du D.2) que lorsque $n=3$, (III.3) est une condition nécessaire et suffisante d'existence d'une matrice de Hankel de spectre ordonné $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$.

Pour montrer que la condition (III.1) n'est pas suffisante, il suffit de prouver l'existence d'un réel $\lambda\ge 1$ tel que $(\lambda,1,1)$ vérifie (III.1) mais pas (III.3). Cela conduit au système $\begin{array}{c}2\lambda^2-6\lambda+1\ge 0\\1\le\lambda<3.\end{array}$
Comme $2\lambda^2-6\lambda+1$ vaut 1 pour $\lambda=3$, tout réel λ strictement inférieur à 3 et assez proche de 3 est solution du système précédent.