Exercice 17 : E3A MP - 2010

L'espace $E = \mathbb{R}^3$ *est muni du produit scalaire usuel :* $\forall (X,Y) \in E^2, < X,Y >= {}^tXY$, *et* $\| X \|^2 = <X,X>$.
L'espace E *est orienté et* $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ *est une base orthonormale directe de* E. *Soit* $u \in \mathcal{L}(E)$ *représenté dans la base* $\mathcal{B}$ *par la matrice :*

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

1. *Vérifier que* A *est une matrice orthogonale et montrer que* A *est diagonalisable dans* $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

2. *On rappelle que si* w *est un endomorphisme continu de* E, $(w \in \mathcal{L}_C(E))$, *la norme de l'endomorphisme* w *est définie par :*

$$|||\, w \,||| = \sup_{\|X\|=1} \| w(X) \|$$

a. *Vérifier que* u *est un endomorphisme continu de* E *et que :* $|||\, u \,||| = 1$.

b. *Soit* $w \in \mathcal{L}_C(E)$. *Prouver qu'il existe* $X_0 \in E$ *tel que* $\| X_0 \| = 1$ *et* $|||\, w \,||| = \| w(X_0) \|$.

3. *On définit dans* $\mathcal{L}_C(E)$ *la suite* (u^k) *des endomorphismes itérés de* u.
Prouver que la suite (u^k) *est une suite bornée de* $\mathcal{L}_C(E)$.

4. *Soit* v *l'endomorphisme de* E *défini par :* $v = id_E - u$.

a. *Vérifier que* $\mathrm{Ker}(v) = Vect(1,0,1)$ *puis que* $\mathrm{Ker}(v)$ *et* $\mathrm{Im}(v)$ *sont orthogonaux et* $E = \mathrm{Ker}(v) \oplus \mathrm{Im}(v)$.

b. *En déduire que,* $\forall X \in E, \exists Z \in E, \exists ! X_1 \in \mathrm{Ker}(v), X = X_1 + Z - u(Z)$.

c. *On pose pour tout* $m \in \mathbb{N}^*$, $p_m = \dfrac{1}{m}\displaystyle\sum_{k=0}^{m-1} u^k$. *Montrer que pour tout* $X \in E$, *la suite* $(p_m(X))$ *converge vers la projection de* X *sur* $\mathrm{Ker}(v)$ *parallèlement à* $\mathrm{Im}(v)$.

Généralisation :
On prend dans cette partie $E = \mathbb{R}^n$ *muni du produit scalaire usuel :* $\forall (X,Y) \in E^2, < X,Y >= {}^tXY$, *la norme d'un vecteur quelconque* X *de* E *étant notée* $\| X \|$ *et soit* $\mathcal{B}$ *une base orthonormale de* E.
Pour toute matrice $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *qui représente dans la base* $\mathcal{B}$ *un endomorphisme* u *de* E, *on note* $|||\, A \,||| = \sup\limits_{\|X\|=1} \| AX \|$.

1. *Vérifier que* $|||\;|||$ *est une norme sur* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2. *Quelques propriétés de la matrice* $B = {}^tAA$.

a. *Montrer que* B *est une matrice symétrique réelle.*

b. *On admet qu'il existe* $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ *telle que* ${}^tPBP$ *soit diagonale réelle. Montrer alors que les valeurs propres de* B *sont positives ou nulles. Étudier le cas où* $A \in GL_n(\mathbb{R})$.

c. *On note* $\rho(B) = \sup \{ | \lambda |, \lambda \in Sp(B) \}$ *où* $Sp(B)$ *désigne l'ensemble des valeurs propres de la matrice* B. *Soit* U *une matrice semblable à* B. *A-t-on* $\rho(U) = \rho(B)$ *?*

d. *Montrer que* $|||\, A \,|||^2 \leqslant \rho(B)$ *puis que* $|||\, A \,|||^2 = \rho(B)$.

3. *On suppose dans cette question que* u *est une homothétie de rapport* $\gamma \neq 0$.

a. *Calculer* $|||\, A \,|||$. *Dans quel cas la suite* $(A^k)_{k\in\mathbb{N}}$ *est-elle bornée ?*

b. *On suppose que* $| \gamma | < 1$ *et on pose pour tout* $m \in \mathbb{N}^*$, $P_m = \dfrac{1}{m}\displaystyle\sum_{k=0}^{m-1} A^k$.
Expliciter pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, P_m *puis déterminer* $\lim\limits_{m\to+\infty} P_m$.

4. *On suppose dans cette question que* u *est un endomorphisme symétrique de* E *(donc diagonalisable) et on note* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ *les valeurs propres de* u, *les* λ_i *étant distincts ou non.*

a. *Calculer* $|||\, A \,|||$.

b. *Dans quel cas la suite* $(A^k)_{k\in\mathbb{N}}$ *est-elle bornée ?*

c. *On suppose que :* $\forall i \in \{1, \ldots, n\}, | \lambda_i | < 1$ *et on pose pour tout* $m \in \mathbb{N}^*$, $P_m = \dfrac{1}{m}\displaystyle\sum_{k=0}^{m-1} A^k$.
Calculer $\lim\limits_{m\to+\infty} P_m$.