E3A
CONCOURS ENSAM-ESTP-ARCHIMEDE

Épreuve de Mathématiques A MP

Un corrigé

Partie 1.

1. On calcule ${}^tAA$ et l'on obtient : ${}^tAA = I_3$. Donc $\boxed{\text{A est orthogonale}}$.

2.2.1 D'après les questions de cours, u étant linéaire et E de dimension finie, $\boxed{u \text{ est un endomorphisme continu de } E}$.
De plus, comme u est une isométrie vectorielle, on a : $\forall X \in E, \| u(X) \| = \| X \|$. D'après la définition de la norme subordonnée qui nous est rappelée, on a donc : $\boxed{||| u ||| = 1}$.

2.2 Soit $w \in \mathcal{L}_C(E)$. Par composition, l'application $X \longmapsto \| w(X) \|$ est continue sur E donc sur la sphère-unité $S(0_E, 1) = \{X \in E, \| X \| = 1\}$. Or, comme E est de dimension finie et que $S(0_E, 1)$ est fermée (image réciproque du fermé $\{1\}$ par l'application continue $X \longmapsto \| X \|$) et bornée, $S(0_E, 1)$ est un compact de E. Comme toute application continue sur un compact y est bornée et atteint ses bornes, $\boxed{\text{il existe } X_0 \in S(0_E, 1) \text{ tel que } ||| w ||| = \| w(X_0) \|}$.

3. Commençons par montrer que $\forall k \in \mathbb{N}, ||| u^k ||| \leq ||| u |||^k \ (= 1)$.
La propriété est vraie pour $k = 0$ et $k = 1$.
Supposons que $||| u^k ||| \leq ||| u |||^k \ (= 1^k = 1)$.
Alors $\forall x \in S(0, 1)$, $||u^{k+1}(x)|| = ||u(u^k(x))||$. Or $||u^k(x)|| \leq 1$
donc $||u(u^k(x))|| \leq ||| u ||| \, ||u^k(x)|| \leq ||| u ||| \cdot ||| u^k ||| \leq ||| u^{k+1} |||$
Récurence établie.
Remarque : cette norme est une norme subordonnée, donc une norme d'algèbre.
$\forall k \in \mathbb{N}, ||| u^k ||| \leqslant 1$.
$\boxed{\text{Donc la suite } (u^k) \text{ est une suite bornée de } \mathcal{L}_C(E).}$

4. Dans ce qui suit, on confond tout vecteur de E avec la matrice-colonne qui lui est canoniquement associée.

4.1 $\ker(v)$ est l'axe de la rotation u. On a :

$$X \in \ker(v) \Longleftrightarrow AX = X \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z &=& x \\ -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z &=& y \\ \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z &=& z \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x &=& z \\ y &=& 0 \end{array} \right. .$$

Donc $\boxed{\ker(v) = \mathrm{Vect}((1, 0, 1))}$.
Soient $X \in \ker(v)$ et $Y \in \mathrm{Im}(v)$.
Alors $AX = X$ et il existe $Z \in E$ tel que $Y = Z - u(Z) = Z - AZ$.
D'où : $< X, Y > = {}^tXY = {}^tXZ - {}^tXAZ$.
Mais comme A est orthogonale, ${}^tA = A^{-1}$ donc
$AX = X \Longleftrightarrow X = A^{-1}X \Longleftrightarrow X = {}^tAX \Longleftrightarrow {}^tX = {}^tXA$.
D'où : $< X, Y > = {}^tXZ - {}^tXZ = 0$. Comme ceci est vrai pour tout élément $X \in \ker(v)$ et $Y \in \mathrm{Im}(v)$, $\boxed{\ker(v) \text{ et } \mathrm{Im}(v) \text{ sont orthogonaux}}$.
D'après ce qui précède, on sait que $\ker(v) \cap \mathrm{Im}(v) = \{0_E\}$. Par le théorème du rang : $\dim(\ker(v)) + \dim(\mathrm{Im}(v)) = \dim(E)$, donc, par caractérisation : $\boxed{E = \ker(v) \oplus \mathrm{Im}(v)}$.

4.2 Donc, pour tout $X \in E$, il existe un unique $X_1 \in \ker(v)$ et un unique $Y \in \mathrm{Im}(v)$ tels que : $X = X_1 + Y$.
Mais $Y \in \mathrm{Im}(v) \Longleftrightarrow \exists Z \in E, Y = Z - u(Z)$; d'où
$\boxed{\forall X \in E, \exists! X_1 \in \ker(v), \exists Z \in E, X = X_1 + Z - u(Z)}$.

4.3 Soient $X \in E$ et $m \in \mathbb{N}^*$. D'après la question précédente : $X = X_1 + Z - u(Z)$ où $X_1 \in \ker(v)$ et $Z \in E$. Alors $v(X_1) = 0_E$, soit $u(X_1) = X_1$ et donc $\forall k \in \mathbb{N}, u^k(X_1) = X_1$. Donc :

$$p_m(X) = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} u^k(X) = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} u^k(X_1) + \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} u^k(Z) - \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} u^{k+1}(Z).$$

Or, $\dfrac{1}{m}\displaystyle\sum_{k=0}^{m-1} u^k(X_1) = X_1$ et, par télescopage : $\dfrac{1}{m}\displaystyle\sum_{k=0}^{m-1} u^k(Z) - \dfrac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1} u^{k+1}(Z) = \dfrac{1}{m}(Z - u^m(Z))$.
D'où : $p_m(X) = X_1 + \dfrac{1}{m}(Z - u^m(Z))$.
On a : $\| Z - u^m(Z) \| \leqslant (\| Z \| + \| u^m(Z) \|)$.
De la question **5.**, on déduit que : $\| Z - u^m(Z) \| \leqslant (\| Z \| + ||| u^m ||| \| Z \|) \leqslant 2 \| Z \|$ puisque $||| u^m ||| \leqslant 1$ pour tout $m \in \mathbb{N}$.
La suite $(Z - u^m(Z))_{m\in\mathbb{N}}$ est donc bornée. D'où $\displaystyle\lim_{m\to+\infty} \frac{1}{m}(Z - u^m(Z)) = 0_E$.
$\boxed{\text{Donc la suite } (p_m(X)) \text{ converge vers } X_1 \text{ c'est-à-dire vers la projection de } X \text{ sur } \ker(v) \text{ parallèlement à } \mathrm{Im}(v)}$.

Partie 2.

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose que $||| A ||| = 0$.
Alors : $\forall X \in E, \| X \| = 1 \Longrightarrow \| AX \| = 0 \Longrightarrow AX = 0_E$. Mais, quitte à diviser X par sa norme, on en déduit, puisque $A0_E = 0_E$ que, pour tout $X \in E$, $AX = 0_E$. Donc $A = O_n$.
Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a : $||| \lambda A ||| = \displaystyle\sup_{\|X\|=1} \| \lambda AX \| = |\lambda| \sup_{\|X\|=1} \| AX \| = |\lambda| \, ||| A |||$.

Pour une preuve dÃ©taillée et plus rigoureuse des propriétés des bornes supérieures, voir la correction du devoir surveillé DS4-2019.

Pour toutes matrices A et B, on a : pour tout $X \in E$,
$\| (A + B)X \| = \| AX + BX \| \leqslant \| AX \| + \| BX \| \leqslant ||| A ||| + ||| B |||$.
D'où : $||| A + B ||| \leqslant ||| A ||| + ||| B |||$. Donc $\boxed{||| \ ||| \text{ est une norme sur } \mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$.

2.2.1 B est produit de matrices à coefficients réels, donc est à coefficients réels.
De plus : ${}^tB = {}^t({}^tAA) = {}^tA{}^{tt}A = {}^tAA = B$. $\boxed{\text{Donc } B \text{ est symétrique}}$.
D'autre part : $\forall X \in E, {}^tXBX = {}^tX{}^tAAX = {}^t(AX)AX = < AX, AX > \geqslant 0$.
Donc $B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.
$\boxed{\text{Par théorème, } B \text{ est diagonalisable et ses valeurs propres sont positives ou nulles}}$.
Si $A \in GL_n(\mathbb{R})$, ${}^tA \in GL_n(\mathbb{R})$ donc, par produit, $B \in GL_n(\mathbb{R})$. Donc 0 n'est pas valeur propre de B.
$\boxed{\text{Si } A \in GL_n(\mathbb{R}), B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \text{ et ses valeurs propres sont strictement positives}}$.

2.2 Si U est une matrice semblable à B, U et B ont le même polynôme caractéristique, donc les mêmes valeurs propres, donc $\boxed{\rho(U) = \rho(B)}$.
Notons que, puisque les valeurs propres de B sont positives ou nulles, $\rho(B) = \sup\{\lambda, \lambda \in \mathrm{sp}(B)\} = \max\{\lambda, \lambda \in \mathrm{sp}(B)\}$.

2.3 Par le théorème spectral, on sait que B est diagonalisable dans une base orthonormale $\mathcal{B}$.
Donc il existe $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et une matrice $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ diagonale telles que :
$B = PD{}^tP$ ($\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont les valeurs propres de B distinctes ou non).
Or, on a, pour $X \in E$: $\| AX \|^2 = < AX, AX > = {}^tXBX = {}^tXPD{}^tPX$. On pose : $Y = {}^tPX$; alors ${}^tY = {}^tXP$ et $\| AX \|^2 = {}^tYDY = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2$. Comme P est une matrice orthogonale, $\| Y \|^2 = {}^tYY = {}^tXP{}^tPX = {}^tXX = \| X \|^2$. Si on prend $X \in E$ tel que $\| X \| = 1$, on a alors : $\| AX \|^2 \leqslant \rho(B) \displaystyle\sum_{i=1}^{n} y_i^2 = \rho(B)$.
On en déduit donc que : $\boxed{||| A |||^2 \leqslant \rho(B)}$.

2.4 Notons i_0 un entier entre 1 et n tel que $\rho(B) = \lambda_{i_0}$ et X_0 un vecteur propre de B, unitaire, associé à la valeur propre $\rho(B)$.
On a : $\| AX_0 \|^2 = {}^tX_0BX_0 = \rho(B){}^tX_0X_0 = \rho(B)$. D'où : $\boxed{||| A |||^2 = \rho(B)}$.

3.3.1 Si u est une homothétie de rapport $\gamma \neq 0$, pour tout $X \in E$, on a : $AX = \gamma X$ donc $\| AX \| = |\gamma| \, \| X \|$.
Donc $\boxed{||| A ||| = |\gamma|}$.

3.2 Pour tout $k \in \mathbb{N}$, u^k est une homothétie de rapport γ^k donc $||| A^k ||| = |\gamma|^k$ et
$\boxed{(A^k)_{k\in\mathbb{N}} \text{ est bornée ssi } |\gamma| \leqslant 1}$.

3.3 On a : $\forall k \in \mathbb{N}, A^k = \gamma^k I_n$ donc $P_m = \left(\dfrac{1}{m}\displaystyle\sum_{k=0}^{m-1} \gamma^k\right) I_n$, soit $\boxed{P_m = \dfrac{1 - \gamma^m}{m(1 - \gamma)} I_n}$ car $\gamma \neq 1$. Comme $| \gamma | < 1$, il est clair que $\boxed{\displaystyle\lim_{m\to+\infty} P_m = O_n}$.

4.4.1 Par le théorème spectral, u est diagonalisable dans une base orthonormale et $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. D'après la question **2.**, $||| A |||^2 = \rho(B)$ où $B = {}^tAA = A^2$. Or, comme A est diagonalisable, les valeurs propres de A^2 sont : $\lambda_1^2, \lambda_2^2, \ldots, \lambda_n^2$. Donc $\rho(B) = \rho(A^2) = (\rho(A))^2$.
D'où : $\boxed{||| A ||| = \rho(A)}$.

4.2 Pour tout $k \in \mathbb{N}$, les valeurs propres de A^k sont : $\lambda_1^k, \lambda_2^k, \ldots, \lambda_n^k$ et $A^k \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Donc, d'après ce que l'on a démontré à la question précédente, on a : $||| A^k ||| = \rho(A^k)$. Mais $\rho(A^k) = \sup\{| \lambda^k |, \lambda \in \mathrm{Sp}(A)\} = (\rho(A))^k$.
Donc $||| A^k ||| = (\rho(A))^k$ et $\boxed{\text{la suite } (A^k) \text{ est bornée ssi } \rho(A) \leqslant 1}$.

4.3 On sait qu'il existe $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que : $A = PD^tP$ où $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.
Alors : $\forall k \in \mathbb{N}, A^k = PD^k\,{}^tP$ avec $D^k = \mathrm{diag}(\lambda_1^k, \ldots, \lambda_n^k)$.
D'où : $P_m = P \text{ diag}\left(\dfrac{1-\lambda_1^m}{m(1-\lambda_1)}, \ldots, \dfrac{1-\lambda_n^m}{m(1-\lambda_n)}\right)\,{}^tP$.
Comme, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}, | \lambda_i | < 1$, alors $\boxed{\lim\limits_{m \to +\infty} P_m = O}$.