

- Soit f dans E . f est de classe C^1 sur $I = [0, 1]$, donc $|f'|$ est continue sur I , et donc $\|f\|$ a bien un sens. De plus $\|f\|$ est positive.
 - * $\forall f, g \in E, \|f + g\| = |(f + g)(0)| + \int_0^1 |(f + g)'(t)| dt \leq |f(0)| + |g(0)| + \int_0^1 |f'(t)| + |g'(t)| dt = \|f\| + \|g\|$.
 - * $\forall f \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \|\lambda f\| = |\lambda f(0)| + \int_0^1 |(\lambda f)'(t)| dt = |\lambda| |f(0)| + |\lambda| \int_0^1 |f'(t)| dt = |\lambda| \|f\|$
 - * $\forall f \in E, \|f\| \geq 0$
 - * $\forall f \in E, \|f\| = 0 \Rightarrow |f(0)| = 0$ et $\int_0^1 |f'(t)| dt = 0$ car ces 2 nombres sont positifs et de somme nulle. Or $|f'|$ est continue et positive et d'intégrale nulle, donc $f' = 0$, i.e. f est constante. Or $f(0) = 0$, donc f est nulle. $\| \cdot \|$ est bien une norme sur E .
- (i.) N_1 et N_2 sont des normes équivalentes sur E si et seulement si

$$\exists a > 0, \exists b > 0 \text{ tq } \forall u \in E, aN_1(u) \leq N_2(u) \leq bN_1(u)$$

Attention : les constantes sont strictement positives.

(ii.) $\forall f \in E, \|f\| = |f(0)| + 2 \int |f'| \leq 4|f(0)| + 2 \int |f'| = 2 \|f\|'$

De même $\|f\|' = 2|f(0)| + \int |f'| \leq 2|f(0)| + 4 \int |f'| = 2 \|f\|$ Et donc

$$\forall f \in E, \frac{1}{2} \|f\| \leq \|f\|' \leq 2 \|f\|. \text{ Les normes sont équivalentes.}$$

- Prenons la norme sur E définie par $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt$, et considérons la suite (f_n) de fonctions de E définie par $\forall x \in \mathbb{R}, f_n(x) = x^n$.
 - $\|f_n\|_1 = \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1}$, qui converge vers 0 et $\|f_n\| = 0 + 2 \int_0^1 f'_n(t) dt = 2(f_n(1) - f_n(0)) = 2$
 - Il n'existe donc pas de réel $a > 0$ tel que $\forall f \in E, a \|f\| \leq \|f\|_1$, ces deux normes ne sont pas équivalentes.

Partie 1

- a. Une matrice est trigonalisable ssi elle est semblable à une matrice triangulaire (supérieure), c'est à dire il existe P inversible et T triangulaire telles que $M = PTP^{-1}$.

Attention aux nombreuses confusions entre matrices et endomorphisme : notamment, parler de bases ou de changement de bases n'a aucun sens pour des matrices.

- $M \in M_{n+1}(\mathbb{C})$. Notons $P_M = \det(xI_{n+1} - M)$ le polynôme caractéristique de M et $u \in L(\mathbb{C}^{n+1})$ de matrice M dans la base canonique. χ_M est de degré $n+1 \geq 1$, donc NON CONSTANT. D'après le théorème de d'Alembert-Gauss, χ_M admet au moins une racine sur \mathbb{C} , donc M admet au moins une valeur propre λ .

*On peut parler de corps algébriquement clos, mais ne pas oublier de préciser que le polynôme est **non constant** !*

- Soit alors V_1 un vecteur propre associé à λ . D'après le théorème de la base incomplète, il existe V_2, \dots, V_{n+1} tels que $B' = (V_1, V_2, \dots, V_{n+1})$ soit une base de \mathbb{C}^{n+1} . Soit Q la matrice de passage de la base canonique à la base B' et $M' = \text{mat}_{B'}(u)$. On a : $u(V_1) = \lambda V_1$ donc $M' =$

$$\begin{pmatrix} \lambda & m'_{1,2} & \cdots & m'_{1,n+1} \\ 0 & m'_{2,2} & \cdots & m'_{2,n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & m'_{n+1,2} & \cdots & m'_{n+1,n+1} \end{pmatrix} \text{ Notons } N = \begin{pmatrix} m'_{2,2} & \cdots & m'_{2,n+1} \\ \vdots & & \vdots \\ m'_{n+1,2} & \cdots & m'_{n+1,n+1} \end{pmatrix}, N \in M_n(\mathbb{C}) \text{ et } L =$$

$$(m'_{1,2}, \dots, m'_{1,n+1}), L \in M_{1,n}(\mathbb{C}) : M' = Q^{-1}MQ = \begin{pmatrix} \lambda & L \\ 0_{n,1} & N \end{pmatrix}$$

- D'après l'hypothèse faite au début de la question, N est trigonalisable, donc : $\exists H \in GL_n(\mathbb{C})$ tq $S = H^{-1}NH$ soit triangulaire supérieure. On a : $N = HSH^{-1}$ et $S \in T_n(\mathbb{C})$

e. On pose $R' = \begin{pmatrix} 1 & 0_{1,n} \\ 0_{n,1} & H^{-1} \end{pmatrix}$. Par produit matriciel par blocs, $R'R = I_{n+1}$, donc : $R \in GL_{n+1}(\mathbf{C})$ et $R^{-1} = R'$.

Si on devine la forme de R^{-1} , il est inutile de parler de déterminant...

f. Soit $M'' = R^{-1}M'R$. Posons $P = QR$: $M'' = P^{-1}MP = \begin{pmatrix} \lambda & LH \\ 0_{n,1} & S \end{pmatrix}$; S est triangulaire supérieure donc M'' aussi. En conclusion : M est trigonalisable.

2. Si $n = 1$: toute matrice $M \in M_1(\mathbf{C})$ est triangulaire, donc trigonalisable.

D'après 1), si toute matrice $M \in M_n(\mathbf{C})$ est trigonalisable, alors toute matrice $M \in M_{n+1}(\mathbf{C})$ est trigonalisable. On peut conclure à l'aide du principe de récurrence que :

toute matrice carrée complexe est trigonalisable

3. a. $\chi_G(x) = \det(xI_3 - G) = (x-1)^3$; 1 est valeur propre d'ordre 3 et $G \neq I_3$ donc $\dim[\ker(G - I_3)] \neq 3$ donc G n'est pas diagonalisable.

b. $rg(G - I_3) = 2$ donc $\dim[\ker(G - I_3)] = 1$, $\boxed{u = e_1 - e_3}$ engendre $\ker(G - I_3)$ et tout autre vecteur propre est de la forme αu donc de première composante $\alpha \neq 1$.

$\det(u, e_2, e_3) = 1$ donc $B' = (u, e_2, e_3)$ est une base de \mathbf{C}^3 .

c. $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $Q^{-1}GQ = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 3 \end{pmatrix}$. $L = (1, 0)$ et $N = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$. 1 est valeur

propre double de N et $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ est vecteur propre associé. Soit $H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$; $S = H^{-1}NH =$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; LH = (1, 0); \boxed{P = QR = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}; P^{-1}GP = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

Domage de ne pas mener les calculs jusqu'au bout : toute la méthode est exposée en début de partie.

4. Deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique; les valeurs propres d'une matrice triangulaire sont les termes de la diagonale. Donc si $A \in M_n(\mathbf{C})$ est semblable à $T \in T_n(\mathbf{C})$, alors les termes diagonaux de T sont les valeurs propres de A

5. a. Par hypothèse : $j < i \Rightarrow s_{i,j} = t_{i,j} = 0$. Soit $U = ST = (u_{i,j})$: $u_{i,j} = \sum_{k=1}^n s_{i,k}t_{k,j}$. Si $i > j$ alors pour $k < i$: $s_{i,k} = 0$ et pour $k \geq i$, $k > j \Rightarrow t_{k,j} = 0$ donc $u_{i,j} = 0$.

Donc $ST \in T_n(\mathbf{C})$. Enfin si $i = j$ seul $k = i$ donne un terme non nul : $u_{i,i} = s_{i,i}t_{i,i}$

Il faut détailler les calculs.

b. On prend $S = T$: $T^2 \in T_n(\mathbf{C})$, de t. diagonaux $(t_{i,i})^2$. Par récurrence : si $T^p \in T_n(\mathbf{C})$, de t. diagonaux $(t_{i,i})^p$, on prend $S = T^p$ d'où $T^{p+1} \in T_n(\mathbf{C})$, de t. diagonaux $(t_{i,i})^{p+1}$.

6. Soit $A \in M_n(\mathbf{C})$. D'après 2), $\exists T \in T_n(\mathbf{C})$, $\exists P \in GL_n(\mathbf{C})$ tq $T = P^{-1}AP$. D'après 4), les termes diagonaux $t_{1,1}, \dots, t_{n,n}$ de T sont les valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ de A . D'après 5), les termes diagonaux de T^k sont $(\lambda_1)^k, \dots, (\lambda_n)^k$; d'après 4) et $T^k = P^{-1}A^kP$, ce sont les valeurs propres de A^k . Donc $\rho(A^k) = \max \left\{ |(\lambda_i)^k|, 1 \leq i \leq n \right\} = (\max \{ |\lambda_i|, 1 \leq i \leq n \})^k$

Conclusion : $\boxed{\rho(A^k) = [\rho(A)]^k}$

7. $\forall A \in M_n(\mathbf{C})$, $\psi(A)$ existe et $\psi(A) \geq 0$; $\psi(A) = 0 \Leftrightarrow A = 0_n$; $\forall A \in M_n(\mathbf{C}), \forall \lambda \in \mathbf{C}$, $\psi(\lambda A) = |\lambda| \psi(A)$; $\forall A, B \in M_n(\mathbf{C})$, $\psi(A+B) \leq \psi(A) + \psi(B)$: ψ est une norme sur $M_n(\mathbf{C})$

Soit $U \in M_n(\mathbf{C})$ tq $\forall i, j, u_{i,j} = 1$: $\psi(U) = 1$, $U^2 = nU$ donc $\psi(U^2) = n$ et si $n \geq 2$ l'inégalité : $\psi(U \times U) \leq \psi(U) \times \psi(U)$ n'est pas vérifiée, donc ψ n'est pas une norme matricielle

8. La norme N et une norme matricielle φ sont équivalentes car $M_n(\mathbf{C})$ est un EV de dim finie. Par définition : $\exists \alpha, \beta > 0$ tq $\forall A \in M_n(\mathbf{C})$, $\alpha\varphi(A) \leq N(A) \leq \beta\varphi(A)$

Attention, les constantes sont strictement positives !

Alors $\forall A, B \in M_n(\mathbf{C})$, $N(AB) \leq \beta\varphi(AB) \leq \beta\varphi(A)\varphi(B) \leq \frac{\beta}{\alpha^2}N(A)N(B)$

9. Soit $\forall k$, $B_k = P^{-1}A_kP$ et $B = P^{-1}AP$. $\forall k$, $B_k - B = P^{-1}(A_k - A)P$

Soit N une norme matricielle : $0 \leq N(B_k - B) \leq N(P^{-1})N(A_k - A)N(P)$ d'où : $N(A_k - A) \rightarrow 0$ qd $k \rightarrow +\infty \Rightarrow N(B_k - B) \rightarrow 0$ qd $k \rightarrow +\infty$

Réciproque : si (B_k) CV vers B , alors (PB_kP^{-1}) CV vers PBP^{-1} d'où (A_k) CV vers A

10. a. $\forall k \in \mathbf{N}^*$, $T^k = \begin{pmatrix} \lambda^k & k\lambda^{k-1}\mu \\ 0 & \lambda^k \end{pmatrix}$. A_k de terme général $a_{i,j}^{(k)}$ CV vers A si et seulement si $\forall i, j$, $a_{i,j}^{(k)} \rightarrow a_{i,j}$ qd $k \rightarrow +\infty$. Donc la suite (T^k) CV ssi les suites complexes (λ^k) et $(k\lambda^{k-1}\mu)$ CV; ssi $[|\lambda| < 1$ (la limite est alors 0_2) ou $[\lambda = 1$ et $\mu = 0$ ($\forall k$, $T^k = I_2$)]

b. $\exists P \in GL_2(\mathbf{C})$ tq $P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$. Alors $D^k = \begin{pmatrix} (\lambda_1)^k & 0 \\ 0 & (\lambda_2)^k \end{pmatrix}$. D'après 9) (A^k) CV ssi (D^k) CV. Les cas de CV sont : $\begin{cases} |\lambda_i| < 1 \text{ pour } i = 1 \text{ et } 2 \text{ (limite } 0_2) \\ \lambda_i = 1 \text{ et } |\lambda_j| < 1 \text{ pour } i \neq j \\ \lambda_1 = \lambda_2 = 1 \end{cases}$

c. Si A n'est pas diagonalisable, nécessairement ses valeurs propres sont égales. D'après 2) elle est trigonalisable : $\exists P \in GL_2(\mathbf{C})$ tq $P^{-1}AP = T = \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ et $\mu \neq 0$ (sinon A serait diagonalisable). Donc d'après a), la suite (T^k) CV ssi $|\lambda| < 1$ et d'après 9), (A^k) CV ssi (T^k) CV. Ici $\rho(A) = |\lambda|$. Donc (A^k) CV ssi $\rho(A) < 1$ et la limite est 0_2 .

d. D'après b), si A est diagonalisable : (A^k) CV vers 0_2 ssi $(|\lambda_1| < 1$ et $|\lambda_2| < 1)$, ssi $\rho(A) < 1$. En conclusion de b) et c) : (A^k) CV vers 0_2 ssi $\rho(A) < 1$

Partie 2

1) a) Posons $Y = AX : \forall i, y_i = \sum_{j=1}^n a_{i,j}x_j$. $\forall j$, $|x_j| \leq N_\infty(X) \Rightarrow |y_i| \leq \left(\sum_{j=1}^n |a_{i,j}|\right)N_\infty(X) \leq M_A N_\infty(X)$ donc $N_\infty(AX) \leq M_A N_\infty(X)$

b) \mathbf{C}^n est un EV de dim finie donc toute norme N sur \mathbf{C}^n est équivalente à la norme $N_\infty : \exists \alpha, \beta > 0$ tq $\forall X \in \mathbf{C}^n$, $\alpha N_\infty(X) \leq N(X) \leq \beta N_\infty(X)$

$N(AX) \leq \beta N_\infty(AX) \leq \beta M_A N_\infty(X) \leq \beta M_A \frac{1}{\alpha} N(X) \leq C_A N(X)$ en posant $C_A = \frac{\beta}{\alpha} M_A$

c) $\forall X \neq 0$, $\frac{N(AX)}{N(X)} \leq C_A$. L'ensemble $\left\{ \frac{N(AX)}{N(X)}, X \in \mathbf{C}^n - \{0\} \right\}$ est une partie non vide et majorée de \mathbf{R} donc admet une borne supérieure.

d) Cette borne sup est le plus petit majorant et C_A est un majorant donc $\tilde{N}(A) \leq C_A$. Dans le cas de la norme N_∞ , on peut prendre $C_A = M_A$ donc : $\tilde{N}_\infty(A) \leq M_A$.

e) $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow GX_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 10 \end{pmatrix}$. On a : $N_\infty(X_0) = 1$, $N_\infty(GX_0) = 10$ d'où $\frac{N_\infty(GX_0)}{N_\infty(X_0)} = 10 \Rightarrow \tilde{N}_\infty(G) \geq 10$.

10. De plus $M_G = 10$ donc $\tilde{N}_\infty(G) \leq 10$. Conclusion : $\tilde{N}_\infty(G) = M_G = 10$

2) $\forall j$, $|y_j| = 1 \Rightarrow N_\infty(Y) = 1$. Soit $Z = AY$. $\forall i$, $|z_i| = \left| \sum_{j=1}^n a_{i,j}y_j \right| \leq \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| \leq M_A$

Si $a_{i_0,j} = 0$ alors $a_{i_0,j}y_j = 0 = |a_{i_0,j}|$, sinon $a_{i_0,j}y_j = |a_{i_0,j}|$ car $\forall u \in \mathbf{C}^*$, $u \frac{\bar{u}}{|u|} = |u|$. Donc $z_{i_0} = \sum_{j=1}^n |a_{i_0,j}| = M_A$. $N_\infty(Z) = M_A \Rightarrow \frac{N_\infty(AY)}{N_\infty(Y)} = M_A \Rightarrow \tilde{N}_\infty(A) \geq M_A$. En utilisant 1)d) on peut conclure : $\tilde{N}_\infty(A) = M_A$

3) a) $\tilde{N}(A) = 0 \Leftrightarrow \forall X \neq 0$, $N(AX) = 0 \Leftrightarrow \forall X \neq 0$, $AX = 0 \Leftrightarrow \forall X$, $AX = 0 \Leftrightarrow A = 0_n$

b) $\forall X \neq 0$, $\frac{N(\lambda AX)}{N(X)} = \frac{|\lambda|N(AX)}{N(X)} \leq |\lambda| \tilde{N}(A)$ donc $\tilde{N}(\lambda A) \leq |\lambda| \tilde{N}(A)$

c) Si $\lambda \neq 0$: $\tilde{N}(A) = \tilde{N}\left(\frac{1}{\lambda}\lambda A\right) \leq \left|\frac{1}{\lambda}\right| \tilde{N}(\lambda A) \Rightarrow |\lambda| \tilde{N}(A) \leq \tilde{N}(\lambda A)$ d'où $|\lambda| \tilde{N}(A) = \tilde{N}(\lambda A)$

Si $\lambda = 0$ on a égalité car les 2 membres sont nuls.

d) $\forall X \neq 0, N[(A+B)X] = N(AX + BX) \leq N(AX) + N(BX) \Rightarrow \frac{N[(A+B)X]}{N(X)} \leq \frac{N(AX)}{N(X)} + \frac{N(BX)}{N(X)} \leq \tilde{N}(A) + \tilde{N}(B)$ donc $\tilde{N}(A+B) \leq \tilde{N}(A) + \tilde{N}(B)$

e) $\forall X \neq 0, \frac{N(AX)}{N(X)} \leq \tilde{N}(A) \Rightarrow N(AX) \leq \tilde{N}(A)N(X)$ et si $X = 0$ les 2 membres sont nuls .

f) On déduit de a),c),d) que \tilde{N} est une norme sur $M_n(\mathbf{C})$. De plus : $\forall A, B \in M_n(\mathbf{C}), \forall X \in \mathbf{C}^n, N(ABX) \leq \tilde{N}(A)N(BX) \leq \tilde{N}(A)\tilde{N}(B)N(X)$ d'où : $\tilde{N}(AB) \leq \tilde{N}(A)\tilde{N}(B)$

Conclusion : $\boxed{\tilde{N} \text{ est une norme matricielle sur } M_n(\mathbf{C})}$ (ce qui en prouve l'existence)

4)a) Soit $\lambda \in Sp(A)$ et X un vecteur propre associé : $X \neq 0$ et $AX = \lambda X \Rightarrow \frac{N(AX)}{N(X)} = |\lambda|$ donc $|\lambda| \leq \tilde{N}(A)$.

En particulier pour λ telle que $|\lambda| = \rho(A)$. Donc $\boxed{\rho(A) \leq \tilde{N}(A)}$

b) Si $A = I_n : \rho(A) = 1$ et $\forall X, AX = X$ donc $\tilde{N}(A) = 1$: on a égalité .

c) Si $A \neq 0_n$ alors $\tilde{N}(A) \neq 0$ d'après 3)a) . Si de plus A est nilpotente , sa seule valeur propre est 0 donc $\rho(A) = 0$ et : $\rho(A) < \tilde{N}(A)$

5) Si (A^k) converge vers 0_n alors $\tilde{N}(A^k) \rightarrow 0$ qd $k \rightarrow +\infty$. $[\rho(A)]^k = \rho(A^k) \leq \tilde{N}(A^k)$ donc $[\rho(A)]^k \rightarrow 0$ qd $k \rightarrow +\infty$. D'où : $\boxed{\rho(A) < 1}$. (Réciproque admise)

6) a) De l'inégalité vue en 5) on déduit pour $k \in \mathbf{N}^*$: $\rho(A) \leq \left[\tilde{N}(A^k) \right]^{\frac{1}{k}}$

b) $\lambda \in Sp(A) \Leftrightarrow \alpha\lambda \in Sp(\alpha A)$ donc $\rho(\alpha A) = |\alpha|\rho(A)$

c) On prend $\alpha = \frac{1}{\rho(A) + \varepsilon}$ ($\alpha > 0$) et on applique a) : $\rho(A_\varepsilon) = \alpha\rho(A) = \frac{\rho(A)}{\rho(A) + \varepsilon} < 1$ car $\varepsilon > 0$

D'après le résultat admis de 5) , $(A_\varepsilon)^k$ CV vers 0 donc $\exists k_\varepsilon$ tq $\forall k \geq k_\varepsilon, \tilde{N}((A_\varepsilon)^k) \leq 1$. $(A_\varepsilon)^k = \alpha^k A^k \Rightarrow \tilde{N}((A_\varepsilon)^k) = \alpha^k \tilde{N}(A^k)$ Donc $\alpha^k \tilde{N}(A^k) \leq 1 \Rightarrow \tilde{N}(A^k) \leq (\rho(A) + \varepsilon)^k$.

d) $\forall k \geq k_\varepsilon, \rho(A) \leq \left[\tilde{N}(A^k) \right]^{\frac{1}{k}} \leq \rho(A) + \varepsilon$: c'est la définition de : $\lim_{k \rightarrow +\infty} \left[\tilde{N}(A^k) \right]^{\frac{1}{k}} = \rho(A)$