Exercice. D'après E3A 2017 MP.

1. Si $\deg(P) \leq n$, alors $\deg(P') \leq n$ et $\deg(\varphi(P)) \leq n$. Donc φ induit une application de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}_n[X]$ notée φ_n.
En utilisant la linéarité de l'opérateur de dérivation, on obtient rapidement que φ_n est linéaire.
Question bien traitée.

2. Explicitons la matrice de φ_n sur la base canonique $\beta_0 = (1, X, \ldots, X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$.
Notons que $\varphi(1) = 1$ et pour $k \in [1, n]$, $\varphi_n(X^k) = X^k - kX^{k-1}$. On obtient donc la matrice

$$Mat_{\beta_0}(\varphi_n) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & \cdots & \vdots \\ & & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 & -n \\ 0 & \cdots & & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. a. La matrice est triangulaire supérieure. Donc $\chi_{\varphi_n} = (X-1)^{n+1}$. Donc φ_n admet 1 pour valeur propre d'ordre $(n+1)$. Or le sous espace propre associé $E_1(\varphi_n)$ est formé des polynômes P tels que $P - P' = P$, c'est à dire $P' = 0$, donc $P \in \mathbb{R}_0[X]$.
Si $n = 0$, ϕ_0 est diagonalisable (c'est l'identité).
Si $n \geq 1$, $\sum_{\lambda \in Sp(\varphi_n)} dim(E_\lambda) = dim(E_1) = 1 < 2 \leq dim(\mathbb{R}_n[X])$. Donc φ_n n'est pas diagonalisable par caractérisation (géométrique) des endomorphismes diagonalisables.

4. D'après ce qui précède, $0 \notin^{(} \varphi_n)$, donc $\ker(\varphi_n) = \{0\}$. Donc φ_n est injective. Comme c'est un endomorphisme en dimension finie, d'après le théorème du rang, φ_n est bijective. C'est donc un automorphisme.

5. Soit $i \in [0, n]$. Le polynôme $\frac{X^i}{i!}$ admet un unique antécédent par la bijection φ_n noté s_i.
De plus, la famille $(\frac{X^i}{i!})_{i \in [0,n]}$ est échelonnée en degrés, donc libre dans $\mathbb{R}_n[X]$. Par un argument de cardinalité/dimension, c'est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
Enfin, φ_n^{-1} est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$, donc envoie toute base de $\mathbb{R}_n[X]$ sur une base de $\mathbb{R}_n[X]$. Finalement, $(s_0 = \varphi_n^{-1}(\frac{X^0}{0!}, s_1 = \varphi_n{-1}(\frac{X}{1!}), \ldots, s_n = \varphi_n^{-1}(\frac{X^n}{n!})$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

6. Remarquons que les éléments id et δ commutent. Alors,en développant (identité remarquable dans l'anneau $\mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$), on obtient : $(\mathrm{id}-\delta)\circ(\mathrm{id}+\delta+\cdots+\delta^n)=\mathrm{id}-\delta^{n+1}$.
Or pour tout $P\in\mathbb{R}_n[X]$, $\delta^{n+1}(P)=0$. Donc $\mathrm{id}-\delta^{n+1}=\mathrm{id}$.

7. Comme $\varphi_n=\mathrm{id}-\delta$, on en déduit que $\varphi_n^{-1}=\mathrm{id}+\delta+\cdots+\delta^n$. On en déduit que pour tout i dans $[\![0,n]\!]$, $s_i=\varphi_n^{-1}(\frac{X^i}{i!})=\sum_{k=0}^n\delta^k(\frac{X^i}{i!})=\sum_{k=0}^i\delta^k(\frac{X^i}{i!})=\sum_{k=0}^i\dfrac{X^k}{k!}$.

Problème : d'après CCP 2015 MP

1. Soit $M_0=\begin{pmatrix}a&0\\0&b\end{pmatrix}$. Par puissance de matrice triangulaire, on obtient que $M_0^k=\begin{pmatrix}a^k&0\\0&b^k\end{pmatrix}$ pour tout entier $k\geq 0$.

Donc $\exp(M_0)=\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^n\frac{1}{k!}\begin{pmatrix}a^k&0\\0&b^k\end{pmatrix}$

$=\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\begin{pmatrix}\sum_{k=0}^n\frac{a^k}{k!}&0\\0&\sum_{k=0}^n\frac{b^k}{k!}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^n\frac{a^k}{k!}&0\\0&\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^n\frac{b^k}{k!}\end{pmatrix}$.

Finalement, $\exp(M_0)=\begin{pmatrix}\exp(a)&0\\0&\exp(b)\end{pmatrix}$.

2. Soit $\theta\in\mathbb{R}$ et $M_1=\begin{pmatrix}0&\theta\\\theta&0\end{pmatrix}$.

a. Commençons par observer que $M_1^2=\begin{pmatrix}\theta^2&0\\0&\theta^2\end{pmatrix}=\theta^2I_2$.

Soit alors $p\in\mathbb{N}$ et la propriété $P_1(p)$: "$M_1^{2p}=\theta^{2p}I_2$". On montre facilement par récurrence que cette propriété est vraie en utilisant l'observation précédente.

On en déduit alors que $M_1^{2p+1}=M_1^{2p}\times M_1=\theta^{2p+1}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$

b. Remarquons que $\mathrm{ch}(\theta)=\dfrac{\exp(\theta)+\exp-\theta}{2}=\dfrac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\dfrac{\theta^k+(-\theta)^k}{k!}\right)$.

Dans cette séries, les termes de rang impairs sont nuls. Il ne reste plus que
$\mathrm{ch}(\theta)=\dfrac{1}{2}\left(\sum_{p=0}^{+\infty}\dfrac{\theta^{2p}+(-\theta)^{2p}}{(2p)!}\right)=\dfrac{1}{2}\left(\sum_{p=0}^{+\infty}\dfrac{2\theta^{2p}}{(2p)!}\right)=\sum_{p=0}^{+\infty}\dfrac{2\theta^{2p}}{(2p)!}$.

c. De manière similaire, on obtient $\mathrm{sh}\,\theta=\left(\sum_{p=0}^{+\infty}\dfrac{2\theta^{2p+1}}{(2p+1)!}\right)$.

d. En raisonnant comme pour la première question, on obtient $\exp(M_1)=\begin{pmatrix}\mathrm{ch}\,\theta&\mathrm{sh}\,\theta\\\mathrm{sh}\,\theta&\mathrm{ch}\,\theta\end{pmatrix}$.

3. Soit T une matrice triangulaire supérieure de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dont les éléments diagonaux sont $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$.

a. C'est du cours. Attention : on demandait de détailler le calcul des coefficients à partir de la formule du produit matriciel : $c_{i,j}=\sum_{k=1}^n a_{i,k}b_{k,j}$.

b. Si T est triangulaire supérieure, toutes les puissances de T sont triangulaires supérieures. Donc toutes les matrices $\dfrac{1}{k!}\cdot T^k$ sont triangulaires supérieures. Alors pour tout entier $n\in\mathbb{N}$, la matrice $\sum_{k=0}^n\dfrac{1}{k!}\cdot T^k$ est une combinaison linéaire de matrices triangulaires supérieures, donc est une matrice triangulaire supérieure. Chacun des coefficients situés strictement sous la diagonale est donc nul. En passant à la limite (pou chaque coefficient sous la diagonale), on en déduit que $\exp(T)$ est triangulaire supérieure.

La diagonale de T est composée des valeurs propres $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ de T. La diagonale de T^k est composée des nombres $\lambda_1^k,\lambda_2^k,\cdots,\lambda_n^k$. La diagonale de $\dfrac{1}{k!}\cdot T^k$ est composée des nombres

$\frac{1}{k!}\lambda_1^k, \frac{1}{k!}\lambda_2^k, \cdots, \frac{1}{k!}\lambda_n^k$. En passant à la limite pour chacun de ces coefficients, on obtient que la diagonale de $\exp(T)$ est composée des nombres $\exp(\lambda_1), \exp(\lambda_2), \cdots, \exp(\lambda_n)$.

c. Soit M une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

i. La matrice M est trigonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ car χ_M est scindé dans $\mathbb{C}$ qui est algébriquement clos (théorème de d'Alembert-Gauss).

ii. Il existe donc une matrice inversible P et une matrice triangulaire T telles que $M = PTP^{-1}$. Alors par récurrence $M^k = PT^kP^{-1}$ et $\frac{1}{k!} \cdot M^k = P\left(\frac{1}{k!}T^k\right)P^{-1}$ et en sommant : $\sum_{k=0}^n M^k = P\left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}T^k\right)P^{-1}$.

Or $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}T^k = \exp(T)$. Alors

$\exp(M) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}M^k = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}PT^kP^{-1} = \lim_{n\to+\infty} P\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}T^k\right)P^{-1}$

Par continuité de ϕ_P,

$\exp(M) = P\left(\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}T^k\right) = P\exp(T)P^{-1}$.

Donc $\exp(P)$ et $\exp(T)$ sont semblables et $\det(\exp(P)) = \det(\exp(T))$.

D'après la question précédente,

$$\det(\exp(T)) = \prod_{i=1}^{n} \exp(\lambda_i) = \exp(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i) = \exp(\text{Tr }(T)) = \exp(\text{Tr }(M)).$$

4. a. On trouve $\det A = -12$.

b. Par l'absurde, s'il existait une matrice B à coefficients **réels** telle que $B^2 = A$, on devrait avoir $\det(B^2) = \det(B)^2 = \det(A) = -12$ avec $\det(B) \in \mathbb{R}$, ce qui est impossible.

Toujours par l'absurde, s'il existait une matrice M à coefficients **réels** vérifiant $\exp(M) = A$, on devrait avoir $\det(A) = \exp(\text{Tr }(M)) = -12$ avec $\text{Tr }(M) \in \mathbb{R}$, ce qui est impossible..

Partie 1

On notera F l'espace vectoriel sur le corps $\mathbb{C}$ des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ combinaisons linéaires d'applications du type $x \mapsto x^k\left(\rho e^{i\theta}\right)^x = x^k\rho^x\exp(i\theta x)$ où $k \in \{0,1,2\}$, $\rho \in]0,+\infty[$ et $\theta \in]0, 2\pi]$.
On rappelle que pour $\rho \in]0,+\infty]$, $\rho^x = \exp(x\ln\rho)$.

1. a. Soit $f_0 : x \mapsto \exp(i\frac{\pi}{2}x)$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors $f_0(n) = \exp(i\frac{\pi}{2}n) = i^n$ car $\exp(i\frac{\pi}{2}) = i$.

b. Soit $f(x) = \alpha 3^n \exp(i\pi x) + \beta x^2 2^x$.

f est bien un élément de F en particulier parce que $\rho_1 = 3 > 0$ (on ne pouvait pas poser $\rho_1 = (-3)$) et $\rho_2 = 2 > 0$.

c. Si f est un élément de F et si x_0 est un réel, $f_1 : x \mapsto f(x+x_0) = (x+x_0)^k\rho^{x+x_0}\exp(i\theta(x+x_0) = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} x_0^{k-j}\rho^{x_0}\exp(i\theta x_0)(x^j\rho^x\exp(i\theta))$ est encore un élément de F. En effet, tout application $x \mapsto x^j\rho^x\exp(i\theta)$ est dans F et f_1 est bien une combinaison linéaire dont les coefficients sont les complexes $\binom{k}{j}x_0^{k-j}\rho^{x_0}\exp(i\theta x_0)$.

2. a. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Pour montrer que la suite de nombres complexes $\left(n^2(\frac{2}{3})^n e^{i\theta n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0, il suffit de montrer que la suite des modules $\left(|n^2(\frac{2}{3})^n e^{i\theta n}|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Or $|n^2(\frac{2}{3})^n e^{i\theta n}| = n^2(\frac{2}{3})^n \to_{n\to+\infty} 0$ par croissances comparées.

b. Soit $(k_1, k_2) \in \{0, 1, 2\}^2, (\rho_1, \rho_2) \in]0, +\infty[^2, (\theta_1, \theta_2) \in]0, 2\pi]^2$ et

$$f_1(x) = x^{k_1} \rho_1^x \exp(i\theta_1 x), f_2(x) = x^{k_2} \rho_2^x \exp(i\theta_2 x).$$

On suppose que $\theta_1 \neq \theta_2$. Soient α et β complexes tels que $\alpha f_1 + \beta f_2 = 0$, c'est à dire $\alpha x^{k_1} \rho_1^x \exp(i\theta_1 x) + \beta x^{k_2} \rho_2^x \exp(i\theta_2 x) = 0$, c'est à dire
$\beta = -\alpha n^{k_1 - k_2} \left(\dfrac{\rho_1}{\rho_2}\right)^n \exp(in(\theta_1 - \theta_2))$.

Si $\rho_1 < \rho_2$, alors comme pour la question précédente, $\beta = \lim_{n \to +\infty} -\alpha n^{k_1 - k_2} \left(\dfrac{\rho_1}{\rho_2}\right)^n \exp(in(\theta_1 - \theta_2)) = 0$. Puis $\alpha = 0$: la famille est donc libre.
Si $\rho_1 = \rho_2$, $\beta = -\alpha n^{k_1 - k_2} \exp(in(\theta_1 - \theta_2))$, donc $|\beta| = |\alpha| n^{k_1 - k_2}$.
Alors, si $k_1 < k_2$, en passant à la limite, $\beta = 0$, puis $\alpha = 0$: la famille est libre.
si $k_1 > k_2$, en passant à la limite, $\alpha = 0$, puis $\beta = 0$: la famille est libre.
enfin, si $k_1 = k_2$, on a pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $\beta = -\alpha \exp(in(\theta_1 - \theta_2))$, donc en particulier $\beta = -\alpha$ (pour $n = 0$) et $\beta = -\alpha \exp(i(\theta_1 - \theta_2))$. Si $\alpha \neq 0$, on aurait $\exp(i(\theta_1 - \theta_2))$, donc $\theta_1 = \theta_2$ car $\theta_i \in [0, 2\pi[$, ce qui est absurde. Finalement, $\alpha = 0$ et $\beta = 0$ donc la famille est libre.

c. i. Soit $f \in F$. Alors f est combinaison linéaire d'éléments du type $f_j : x \mapsto x^{k_j} \rho_j^x \exp(i\theta_j x)$ pour $j \in [1, N]$. On peut supposer $\rho_1 \leq \rho_2 \leq \cdots \leq \rho_N$ et $k_1 \leq k_2 \leq \cdots \leq k_N$ et $\theta_1 \leq \theta_2 \leq \cdots \leq \theta_N$.
Supposons que $\forall n \in \mathbb{N}, f(n) = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j f_j(n) = 0$, c'est à dire

$$\alpha_N f_N(n) = -\sum_{j=1}^{N-1} \alpha_j f_j(n)$$

Montrons que $\alpha_N = 0$ (alors par récurrence, on pourrait montrer que $\forall j \in [1, N], \alpha_j = 0$ et finalement, $f = 0$).
Par l'absurde, si $\alpha_N \neq 0$, quitte à diviser par α_N on peut supposer $\alpha_N = 1$, c'est à dire $\forall n \in \mathbb{N}, f_N(n) = n^{K_N} \rho_N \exp(in\theta_N) = -\sum_{j=1}^{N-1} \alpha_j f_j(n)$.
En imitant le raisonnement de la question précédente, si $\rho_N > \rho_{N-1}$, en divisant par $n^{K_N} \rho_N \exp(in\theta_N)$, on obtient $1 = 0$ en passant à la limite. Donc $\rho_N = \rho_{N-1}$.
De même, si $k_N > k_{N-1}$, on obtient $1 = 0$ en passant à la limite. Donc $k_N = k_{N-1}$.
Enfin,
Soit $f \in F$. Montrer que si n, $\forall n \in N, f(n) = 0$, alors f est l'application nulle.

ii. Si deux applications f et g de F vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}, f(n) = g(n)$, alors $f - g \in F$ et $\forall n \in \mathbb{N}, (g - f)(n) = 0$. Alors d'après ce qui précède, $(g - f) = 0$ donc $g = f$.

Dans la suite de cette partie, A est une matrice inversible de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

3. Justifier l'existence de 9 applications $\omega_{i,j}$ éléments de F telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, A^n = (\omega_{i,j}(n))_{1 \leq i,j \leq 3}.$$

D'après le théorème de Cayley-Hamilton, $\chi_A(A) = 0$. Donc A admet un polynôme annulateur non nul de degré inférieur ou égal à 3.
En effectuant la division euclidienne de X^n par χ_A, on obtient que A^n est un polynôme en A de degré inférieur ou égal à 2, plus précisément, $A^n = a_n A^2 + b_n A + c_n I_3$.
Le termes a_n, b_n et c_n sont des fonctions de n et plus précisément, s'expriment à l'aide des fonctions de F. Ainsi, le coefficient de la i-ème ligne et la j-ème colonne de la matrice A^n est combinaison linéaire de fonctions de F donc dans F.

4. On pose pour tout réel t, la matrice $\gamma(t) = (\omega_{i,j}(t))_{1 \leq i,j \leq 3} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

a. $\gamma(0) = I_3$ et $\gamma(1) = A$.

b. Pour tout couple d'entiers naturels (n, m), on a la relation : $\gamma(n+m) = A^{n+m} = A^n \cdot A^m = \gamma(n)\gamma(m)$. Pour x réel et m entier naturel, on pose $f(x) = \omega_{i,j}(x+m)$ et $g(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{3} \omega_{i,k}(x)\omega_{k,j}(m)$.

c. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g(n)$ est le coefficient de la i-ème ligne et la j-ème colonne de la matrice $\gamma(n)\gamma(m)$ donc est égal à $\omega_{i,j}(n+m)$. Donc $f = g$ sur $\mathbb{N}$. Comme ce sont des éléments de F, alors $f = g$ sur $\mathbb{R}$. Ainsi, $\forall m \in \mathbb{N}, \gamma(x+m) = \gamma(x)\gamma(m)$.

d. Pour $\forall x \in \mathbb{R}$, les applications $y \mapsto \omega_{i,j}(x+y)$ et $y \mapsto \sum_{k=1}^{3} \omega_{i,k}(x)\omega_{kj}(y)$ sont des éléments de F qui coïncident surs $\mathbb{N}$, donc sur $\mathbb{R}$ et ainsi, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^3, \gamma(x+y) = \gamma(x)\gamma(y)$.

5. On a $\gamma(0) = \gamma(1)\gamma(-1)$, c'est à dire $I_3 = A \cdot \gamma(-1)$. De même, $I_3 = \gamma(-1) \cdot A$ donc $\gamma(-1) = A^{-1}$. Par récurrence, on montre que pour tout entier naturel p non nul, $\gamma(px) = \gamma(x)^p$. Alors en particulier, $\gamma(1) = \gamma(p \cdot 1/p)$. Donc $A = (\gamma(1/p))^p$.

6. Chaque fonction $x \mapsto x^k \rho^x \exp(i\theta x)$ est dérivable et sa dérivée est égale à $x \mapsto kx^{k-1}(\rho^x \exp(i\theta x)) + \ln(\rho)\rho^x(x^k \exp(i\theta x)) + i\theta \exp(i\theta x)(x^k \rho^x)$.
Par combinaison linéaire de fonctions dérivables, $\omega_{i,j}$ est dérivable.
On note $\omega'_{i,j}$ la dérivée de $\omega_{i,j}$.
On admet que l'application γ définie pour tout réel t par $\gamma(t) = (\omega_{i,j}(t))_{1 \leq i,j \leq 3}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on pose $\forall t \in \mathbb{R}, \gamma'(t) = (\omega'_{i,j}(t))_{1 \leq i,j \leq n}$.

7. On a $\dfrac{1}{h}(\gamma(t+h) - \gamma(t)) = \dfrac{1}{h}(\gamma(t) \cdot (\gamma(h) - \gamma(0)))$.
Chaque terme $\dfrac{1}{h}(\omega_{i,j}(h) - \omega_{i,j}(0))$ tend vers $\omega'_{i,j}(0)$ lorsque h tend vers 0. Donc le terme $\dfrac{1}{h}(\gamma(h) - \gamma(0))$ tend vers $\gamma'(0)$. Finalement, $\gamma'(t) = \gamma'(0)\gamma(t)$.
Enfin, on a vu plus haut que $\gamma(0) = I_3$.

On admet qu'on peut en déduire que $\exp(\gamma'(0)) = A$.

8. **BILAN :** En utilisant les différents résultats du problème répondez aux questions suivantes en argumentant :

a. la fonction $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est-elle surjective ?
Non : il suffit de prendre une matrice de déterminant négatif comme à la question 4 des préliminaires.

b. la fonction $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ est-elle surjective ?
Non : il suffit de prendre une matrice inversible de déterminant négatif comme à la question 4 des préliminaires

c. l'image de $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$ contient-elle $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$?
Oui d'après la question 7 de la partie 1. Etant donnée une matrice A inversible à coefficients réels, la matrice $\gamma'(0)$ existe et convient.

Partie 2 : exemple

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Laissée au lecteur : les calculs sont un peu longs, mais possibles.
Pour les dernières questions, la matrice $B = \gamma(1/2)$ vérifie $B^2 = A$ et la matrice $M = \gamma'(0)$ vérifie $\exp(M) = A$.