Pour le 7 octobre 2016 :
Problème extrait d'une épreuve de concours.

Une suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs complexes est dite périodique s'il existe un entier naturel non nul p tel que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad u_{n+p} = u_n$$

On dira qu'un tel p est une période de la suite u.
On notera S l'ensemble des suites périodiques à valeurs complexes.

1) a) Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in S$.
Montrer qu'il existe une plus petite période de u notée $p(u)$.
On note $P(u)$ l'ensemble des périodes de la suite u. Déterminer $P(u)$ en fonction de $p(u)$.

b) On pose a la suite constante égale à 1 et b la suite géométrique de raison i et de premier terme $b_0 = 1$.
Montrer que $a, b \in S$. Déterminer $p(a)$, $p(b)$, $P(a)$ et $P(b)$.

c) Soient $u, v \in S$. Montrer qu'ils admettent une période commune.
Quelle est la plus petite période commune à u et v ?

d) Montrer que S est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$

2) a) A quelle condition une suite géométrique u de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ appartient-elle à S ?

b) Pour tout entier naturel N on considère la suite $a(N)$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \ , \ a(N)_n = e^{\frac{2in\pi}{N}}$$

Montrer que la famille des suites $a(N)$ pour N parcourant les nombres premiers forme une famille libre de S.

c) En déduire que S n'est pas de dimension finie.

3) On fixe dans cette partie k un entier naturel non nul

a) On note S_k l'ensemble des suites u de S telles que k est une période de u.
Montrer que S_k est un sous-espace vectoriel de S et que a et $a(k)$ sont dans S_k.

b) On considère

$$L : \begin{array}{ccc} S_k & \mapsto & \mathbb{R}^k \\ u & \mapsto & (u_0, ..., u_{k\text{-}1}) \end{array}$$

Montrer que L est un isomorphisme.

c) Pour tout entier naturel m on définit une suite $\varepsilon(m, k)$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \ , \ \varepsilon(m, k)(n) = \begin{cases} 1 \text{ si } n \equiv m[k] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Montrer que pour tout entier naturel m , $\varepsilon(m, k) \in S_k$.

d) Montrer que les $\varepsilon(m, k)$ pour $m \in \{0, ..., k\text{-}1\}$ forment une base de S_k.

e) Quelles sont les coordonnées des suites a et $a(k)$ dans cette base ?

4) Pour tout u de S, n entier naturel et p période de u on pose :

$$A(u, p, n) = \frac{1}{p} \sum_{r=0}^{p\text{-}1} u_{n+r}$$

a) Montrer que $A(u, p, n)$ est indépendant des choix de n et de p. On le notera dorénavant $A(u)$.

b) Montrer que A est une forme linéaire de S.

c) Calculer $A(a(N))$ pour tout entier naturel N.

d) Soit k entier naturel non nul et A_k la restriction de A à S_k.
Déterminer une équation du noyau de A_k dans la base des $\varepsilon(m, k)$.

e) Soit $K = Ker(A)$. Montrer que :

$$S = K \oplus Vect(a)$$

5) Pour $u \in S$ on définit une suite $u' = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ u'_n = u_{n+1} - u_n$$

a) Montrer que l'application : $D : u \mapsto u'$ est un endomorphisme de S.

b) Trouver noyau et image de D.

c) Montrer que K est stable par D et que D induit sur K un automorphisme.

Correction :
Problème 1 : extrait de la première épreuve du concours commun Mines-Ponts 1995 M et P'

Une suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs complexes est dite périodique s'il existe un entier naturel non nul p tel que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad u_{n+p} = u_n$$

On dira qu'un tel p est une période de la suite u.
On notera S l'ensemble des suites périodiques à valeurs complexes.

1) a) Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in S$.
L'ensemble des périodes de u est une partie non vide $\mathbb{N}$ donc possède un plus petit élément noté $p(u)$.
On note $P(u)$ l'ensemble des périodes de la suite u. Il est évident que $P(u)$ est l'ensemble des multiples de $p(u)$.
b) On pose a la suite constante égale à 1 et b la suite géométrique de raison i et de premier terme $b_0 = 1$.
a est périodique de période 1, b de période 4 : $p(a) = 1$, $p(b) = 4$, $P(a) = \mathbb{N}$ et $P(b) = 4\mathbb{N}$.
c) Soient $u, v \in S$. Alors $p(u)p(v)$ est une période commune.
La plus petite période commune à u et v est le plus petite multiple commun donc $ppcm(p(u), p(v))$
d) S est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$:
évidemment non vide et stable par combinaison linéaire car si u et v périodiques, $\alpha u + \beta v$ est périodique pour la période $ppcm(p(u), p(v))$

2) a) Une suite géométrique u de raison r de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ appartient à S ssi il existe p tel que $r^p = 1$ cad r racine de l'unité.
b) Pour tout entier naturel N on considère la suite $a(N)$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \ , \ a(N)_n = e^{\frac{2in\pi}{N}}$$

D'après le a) ces suites sont dans S.
Montrons que la famille des suites $a(N)$ pour N parcourant les nombres premiers forme une famille libre de S :
Considérons $N_1, ..., N_k$ des nombres premiers distincts. Dire que

$$\sum_{j=1}^{k} \lambda_j e^{\frac{2in\pi}{N_j}} = 0$$

pour tout n compris entre 1 et k revient à résoudre un système en $(\lambda_1, ..., \lambda_k)$ de matrice une matrice de Vandermonde en les $e^{\frac{2i\pi}{N_j}}$ qui sont deux à deux distincts ! donc la famille est libre.
c) Ainsi S n'est pas de dimension finie car on a exhibé une famille libre infinie.

3) On fixe dans cette partie k un entier naturel non nul
a) On note S_k l'ensemble des suites u de S telles que k est une période de u.
S_k est non vide et stable par combinaison linéaire donc c'est un sous-espace vectoriel de S .a et $a(k)$ sont bien sur dans S_k.
b) On considère

$$L : \begin{array}{ccc} S_k & \mapsto & \mathbb{R}^k \\ u & \mapsto & (u_0, ..., u_{k\text{-}1}) \end{array}$$

L est évidemment linéaire, de plus une suite périodique de période k est entièrement déterminée par la donnée de ses k premiers termes donc L est bijective et L est un isomorphisme.
c) Pour tout entier naturel m on définit une suite $\varepsilon(m, k)$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \ , \ \varepsilon(m, k)(n) = \left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ si } n \equiv m[k] \\ 0 \text{ sinon} \end{array} \right.$$

$\varepsilon(m, k)$ est de période k donc $\varepsilon(m, k) \in S_k$.
d) La famille des $\varepsilon(m, k)$ pour $m \in \{0, ..., k\text{-}1\}$ est l'image réciproque par L de la base canonique de $\mathbb{R}^k$ donc ils forment une base de S_k.
e) a a pour coordonnées $(1, 1, 1, 1, ..., 1)$ et $a(k)$ a pour coordonnées en notant $r = e^{\frac{2i\pi}{N}}$, $(1, r, r^2, ..., r^{k-1})$.

4) Pour tout u de S, n entier naturel et p période de u on pose :

$$A(u, p, n) = \frac{1}{p} \sum_{r=0}^{p\text{-}1} u_{n+r}$$

a) $A(u,p,n)$ est indépendant du choix de n par un simple changement d'indice.
Par ailleurs en notant p_0 la plus petite période de u on a $p = kp_0$ et

$$A(u,p,0) = \frac{1}{p}\sum_{r=0}^{p-1} u_r = \frac{1}{k}\left(\sum_{t=0}^{k-1}\frac{1}{p_0}\sum_{r=tp_0}^{tp_0+p_0-1} u_r\right)$$

Or par périodicité toutes les sommes $\frac{1}{p_0}\sum_{r=tp_0}^{tp_0+p_0-1} u_r$ ont même valeur donc

$$A(u,p,0) = \frac{1}{p_0}\sum_{r=tp_0}^{tp_0+p_0-1} u_r = A(u,p_0,0)$$

est donc indépendant de p. On le notera dorénavant $A(u)$.
b) A est une forme linéaire de S car il existe une période commune à deux éléments de S et donc on peut voir A comme combinaison linéaire de valeurs des deux suites pour les mêmes indices.
c) $N.A(a(N))$ est la somme des puisances 0,1,...,$N-1$ d'une racine primitive N-iéme de l'unité donc finalement la somme de toutes les racines N-ième de l'unité donc 0 si $N \geq 1$. Pour $N = 1$ cela fait 1.
d) Soit k entier naturel non nul et A_k la restriction de A à S_k.
Déterminer une équation du noyau de A_k dans la base des $\varepsilon(m,k)$ est évidemment $x_1+...+x_k = 0$ où $(x_1,...,x_k)$ désignent les coordonnées dans cette base.
e) Soit $K = Ker(A)$. $a \notin K$ donc $Vect(a)$ et K sont en somme directe.
De plus $Ker(A)$ est le noyau d'une forme linéaire non nulle donc un hyperplan donc supplémentaire de toute droite qu'il ne contient pas et

$$S = K \oplus Vect(a)$$

5) Pour $u \in S$ on définit une suite $u' = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ u'_n = u_{n+1} - u_n$$

a)L'application : $D : u \mapsto u'$ est un endomorphisme de S car linéaire et à image dans S.
b) Le noyau de D est $Vect(a)$. L'image de D est incluse dans K.
Par ailleurs si b est dans K la suite des sommes partielles est périodique donc l'image de D est K.
c) K est donc stable par D et que D induit sur K un endomorphisme de noyau $K \cap Vect(a) = \{0\}$ donc un automorphisme.