EMLYON 2016 S

Éléments de correction

Premier problème

Première partie

1. Les deux équations forment un système linéaire d'inconnue (P_1, P_2), que l'on résoud sans difficulté :

$$\begin{cases} P_1 + P_2 = I_3 \\ 4P_1 + 9P_2 = A \end{cases} \underset{L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1}{\iff} \begin{cases} P_1 + P_2 = I_3 \\ 5P_2 = A - 4I_3 \end{cases} \iff \begin{cases} P_1 = \frac{1}{5}(9I_3 - A) \\ P_2 = \frac{1}{5}(A - 4I_3) \end{cases}.$$

On obtient :

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. a. Le calcul donne $P_1^2 = P_1$, $P_1P_2 = P_2P_1 = 0$ et $P_2^2 = P_2$.

b. On démontre le résultat par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$. Il est vrai aux rangs $k = 0$ et $k = 1$ par définition de P_1 et P_2 et, s'il est acquis à un rang $k \in \mathbb{N}$, alors d'après **a.** :

$$\begin{aligned} A^{k+1} &= AA^k = (4P_1 + 9P_2)(4^kP_1 + 9^kP_2) \\ &= 4^{k+1}P_1^2 + 4 \cdot 9^kP_1P_2 + 9 \cdot 4^kP_2P_1 + 9^{k+1}P_2^2 \\ &= 4^{k+1}P_1 + 9^{k+1}P_2, \end{aligned}$$

ce qui constitue le résultat au rang $k + 1$.

3. Un calcul similaire à celui mené en **2.b.**, à partir des relations établies en **2.a.**, montre que la matrice

$$B = \sqrt{4}P_1 + \sqrt{9}P_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

vérifie $B^2 = 4P_1 + 9P_2 = A$.

4. La matrice A étant triangulaire, ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux : 4 et 9.

Deuxième partie

5. Les applications $P \longmapsto P(f)$ et $P \longmapsto \sum_{i=1}^m P(\lambda_i)p_i$, *linéaires* de $\mathbb{R}_m[X]$ dans $\mathbf{L}(E)$, coïncident par hypothèse sur les vecteurs $1, X, X^2, \dots, X^m$ de la base canonique de $\mathbb{R}_m[X]$. Elles sont donc égales sur $\mathbb{R}_m[X]$:

$$\forall P \in \mathbb{R}_m[X], \quad P(f) = \sum_{i=1}^m P(\lambda_i)p_i.$$

Remarque. Bien entendu, on peut établir ce résultat en décomposant P sur la base canonique : $P = \sum_{k=0}^m a_kX^k$.

6. Comme le polynôme N, de degré m, s'annule en chacun des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_m$, la formule de question **5.** s'applique et donne $N(f) = \widetilde{0}$.

7. a. On peut noter pour commencer que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $M_i(\lambda_i) \neq 0$ car $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ sont deux-à-deux distincts par hypothèse, ce qui assure que L_i est bien défini. Il apparaît sur la définition que λ_j est racine de M_i pour tout $j \neq i$, si bien que :

$$\forall i, j \in [\![1, n]\!], \quad L_i(\lambda_j) = \begin{cases} \frac{1}{M_i(\lambda_i)}M_i(\lambda_i) = 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}.$$

b. Dans la somme apparaissant dans la formule de la question **5.** appliquée au polynôme $L_i \in \mathbb{R}_m[X]$, $1 \leqslant i \leqslant n$:

$$L_i(f) = \sum_{j=1}^m L_i(\lambda_j)p_j,$$

tous les termes sont donc nuls sauf celui d'indice $j = i$ et il reste donc : $L_i(f) = p_i$.

8. **a.** C'est l'hypothèse appliquée à $k = 0$:

$$e = f^0 = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^0 p_i = \sum_{i=1}^{m} p_i.$$

b. D'après **a.**,

$$\forall x \in \mathrm{E}, \quad x = e(x) = \sum_{i=1}^{m} p_i(x) \in \sum_{i=1}^{m} \operatorname{Im} p_i$$

d'où $\mathrm{E} = \sum_{i=1}^{m} \operatorname{Im} p_i$.

9. **a.** On obtient immédiatement :

$$\mathrm{N} = (\mathrm{X} - \lambda_i)\mathrm{M}_i = \mathrm{M}_i(\lambda_i)(\mathrm{X} - \lambda_i)\mathrm{L}_i.$$

b. D'après les questions **6.**, **7.b.** et **a.**,

$$(f - \lambda_i e) \circ p_i = (f - \lambda_i e) \circ \mathrm{L}_i(f) = \big((\mathrm{X} - \lambda_i)\mathrm{L}_i\big)(f) = \frac{1}{\mathrm{M}_i(\lambda_i)}\mathrm{N}(f) = \widetilde{0}$$

d'où il ressort que $\operatorname{Im} p_i \subset \operatorname{Ker}(f - \lambda_i e)$.

10. Par hypothèse, les endomorphismes $p_1, \ldots, p_m$ sont non nuls. L'inclusion de la question **9.b.** assure alors que $\operatorname{Ker}(f - \lambda_i e) \neq \{0\}$ pour tout $i \in [\![1, m]\!]$. Chacun des réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ est donc valeur propre de f.
Par ailleurs, il ressort des questions **8.b.** et **9.b.** que les sous-espaces propres $\mathrm{E}_{\lambda_i}(f) = \operatorname{Ker}(f - \lambda_i e)$, $1 \leqslant i \leqslant m$, engendrent E. Comme ces sous-espaces sont en somme directe par théorème, ils sont donc supplémentaires dans E :

$$\mathrm{E} = \bigoplus_{i=1}^{m} \operatorname{Ker}(f - \lambda_i e),$$

ce qui signifie que l'endomorphisme f est diagonalisable de valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$.
En affinant un peu l'argument précédent, on justifie que les sous-espaces $\operatorname{Im} p_i$ sont supplémentaires dans E. En comparant les deux relations

$$\sum_{i=1}^{m} \dim(\operatorname{Im} p_i) = \dim \mathrm{E} \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{m} \dim \mathrm{E}_{\lambda_i}(f) = \dim \mathrm{E}$$

où $\dim(\operatorname{Im} p_i) \leqslant \dim \mathrm{E}_{\lambda_i}(f)$ pour tout $i \in [\![1, m]\!]$, on obtient alors $\dim(\operatorname{Im} p_i) = \dim \mathrm{E}_{\lambda_i}(f)$ pour tout $i \in [\![1, m]\!]$. On a donc égalité des dimensions dans l'inclusion de la question **9.b.**, d'où l'on déduit que $\mathrm{E}_{\lambda_i}(f) = \operatorname{Im} p_i$ pour tout $i \in [\![1, m]\!]$.

11. **a.** Pour $i \neq j \in [\![1, m]\!]$, le polynôme $\mathrm{L}_i\mathrm{L}_j$ qui admet les réels deux-à-deux distincts $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ pour racines, est multiple de $\mathrm{N} = \prod_{k=1}^{m}(\mathrm{X} - \lambda_k)$: il existe $\mathrm{Q}_{i,j} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ tel que $\mathrm{L}_i\mathrm{L}_j = \mathrm{Q}_{i,j}\mathrm{N}$ et alors, d'après **6.** et **7.b.**,

$$p_i \circ p_j = \mathrm{L}_i(f) \circ \mathrm{L}_j(f) = (\mathrm{L}_i\mathrm{L}_j)(f) = (\mathrm{Q}_{i,j}\mathrm{N})(f) = \mathrm{Q}_{i,j}(f) \circ \mathrm{N}(f) = \widetilde{0}.$$

b. D'après **8.a.** et **a.**,

$$\forall i \in [\![1, m]\!], \quad p_i = e \circ p_i = \Big(\sum_{j=1}^{m} p_j\Big) \circ p_i = \sum_{j=1}^{n} p_j \circ p_i = p_i \circ p_i.$$

c. D'après **a.**, **b.** et par linéarité de p_i,

$$\forall i \in [\![1, m]\!], \quad p_i \circ f = p_i \circ \Big(\sum_{j=1}^{m} \lambda_j p_j\Big) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j p_i \circ p_j = \lambda_i p_i.$$

12. On démontre le résultat par récurrence sur k, celui-ci étant valable aux rangs $k \leqslant m$ par hypothèse. S'il est acquis à un rang k alors, d'après **11.c.**,

$$f^{k+1} = f^k \circ f = \Big(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i^k p_i\Big) \circ f = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^k (p_i \circ f) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^{k+1} p_i,$$

ce qui constitue le résultat au rang $k + 1$ et achève donc la récurrence.
En raisonnant comme en **5.**, on en déduit que :

$$\forall \mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}], \quad \mathrm{P}(f) = \sum_{i=1}^{m} \mathrm{P}(\lambda_i) p_i.$$

Troisième partie

13. L'application φ est bilinéaire par linéarité des p_i, $1 \leqslant i \leqslant m$, et bilinéarité du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Elle est symétrique par symétrie du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Enfin, pour $x \in \mathrm{E}$,

$$\varphi(x, x) = \sum_{i=1}^{m} \|p_i(x)\|^2 \geqslant 0$$

en notant $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée au produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Si $\varphi(x, x) = 0$, alors chacun des réels positifs $\|p_i(x)\|^2$, $1 \leqslant i \leqslant m$, est nul, ce qui signifie que $p_i(x) = 0$ pour tout $i \in [\![1, m]\!]$, et implique $x = \sum_{i=1}^{m} p_i(x) = 0$.
Toutes les conditions sont donc réunies pour que φ soit un produit scalaire sur E.

14. Pour $x, y \in \mathrm{E}$, on observe d'après **11.c.** que

$$\varphi\big(f(x), y\big) = \sum_{i=1}^{m} \langle (p_i \circ f)(x), p_i(y) \rangle = \sum_{i=1} \lambda_i \langle p_i(x), p_i(y) \rangle$$

est une expression symétrique en x, y. L'endomorphisme f est donc symétrique pour le produit scalaire φ, ce qui justifie de nouveau que f est diagonalisable.

15. La question **11.b.** justifie déjà que p_i est un projecteur, nécessairement sur $\operatorname{Im} p_i = \operatorname{Ker}(p_i - e)$ parallèlement à $\operatorname{Ker} p_i$. Par ailleurs, ces deux sous-espaces sont orthogonaux pour le produit scalaire φ car, d'après **11.a.**,

$$\forall (x, y) \in \operatorname{Im} p_i \times \operatorname{Ker} p_i, \quad \varphi(x, y) = \sum_{j=1}^{m} \langle p_j(x), p_j(y) \rangle = \sum_{j=1}^{m} \big\langle p_j\big(p_i(x)\big), p_j(y) \big\rangle = \langle p_i(x), 0 \rangle = 0$$

d'où le résultat.

Deuxième problème

Première partie

1. Pour $x \leqslant 0$, la série $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n^x}$ diverge grossièrement :

$$\left| \frac{(-1)^{n+1}}{n^x} \right| \xrightarrow[n \to \infty]{} \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ +\infty & \text{si } x < 0 \end{cases} \neq 0.$$

2. a. Il vient :

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad u_{2(p+1)} - u_{2p} = \frac{1}{(2p+1)^x} - \frac{1}{(2p+2)^x} \geqslant 0$$

alors que :

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad u_{2(p+1)-1} - u_{2p-1} = \frac{1}{(2p+1)^x} - \frac{1}{(2p)^x} \leqslant 0,$$

ce qui établit la croissance de $(u_{2p})_{p \geqslant 1}$ et la décroissance de $(u_{2p-1})_{p \geqslant 1}$. Enfin,

$$u_{2p-1} - u_{2p} = \frac{1}{(2p)^x} \xrightarrow[p \to \infty]{} 0,$$

ce qui achève de montrer que les deux suites $(u_{2p})_{p \geqslant 1}$ et $(u_{2p-1})_{p \geqslant 1}$ sont adjacentes. Par théorème, elles convergent alors toutes deux vers une limite commune $\mathrm{S}(x)$.

b. Pour $\varepsilon > 0$ donné, la convergence de $(u_{2p})_{p \geqslant 1}$ et $(u_{2p-1})_{p \geqslant 1}$ vers $\mathrm{S}(x)$ donne l'existence de deux entiers $p_1, p_2 \in \mathbb{N}^*$ tels que :

$$\forall p \geqslant p_1, \quad \big| u_{2p} - \mathrm{S}(x) \big| \leqslant \varepsilon$$

et

$$\forall p \geqslant p_2, \quad \big| u_{2p-1} - \mathrm{S}(x) \big| \leqslant \varepsilon.$$

En notant $n_0 = \max(2p_1, 2p_2 - 1) \geqslant 1$, on a alors, en distinguant les cas selon la parité de n :

$$\forall n \geqslant n_0, \quad |u_n - \mathrm{S}(x)| \leqslant \varepsilon.$$

c. La question **b.** établit la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ des sommes partielles de la série $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n^x}$, laquelle est donc convergente. Sa somme est la limite de la suite des sommes partielles :

$$\mathrm{S}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^x}.$$

d. Les suites $(u_{2p})_{p\geqslant 1}$ et $(u_{2p-1})_{p\geqslant 1}$ étant adjacentes, leurs termes encadrent leur limite commune, et plus précisément par croissance de la première et décroissance de la seconde :

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad u_{2p} \leqslant \mathrm{S}(x) \leqslant u_{2(p+1)-1} = u_{2p+1} \leqslant u_{2p-1}.$$

e. Les inégalités de la question **d.** donnent, pour $n = 2p$, $p \geqslant 1$,

$$0 \leqslant \mathrm{S}(x) - u_{2p} \leqslant u_{2p+1} - u_{2p} = \frac{1}{(2p+1)^x}$$

alors que pour $n = 2p-1$, $p \geqslant 1$,

$$\frac{-1}{(2p)^x} = u_{2p} - u_{2p-1} \leqslant \mathrm{S}(x) - u_{2p-1} \leqslant 0.$$

Dans les deux cas,

$$|\mathrm{S}(x) - u_n| \leqslant \frac{1}{(n+1)^x}$$

et l'inégalité est donc valable pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

f. D'après la question **e.**, il suffit que

$$\frac{1}{(n+1)^x} \leqslant \varepsilon \quad \Longleftrightarrow \quad n \geqslant \frac{1}{\varepsilon^{1/x}} - 1$$

pour que u_n soit une valeur approchée de $\mathrm{S}(x)$ à la précision ε, ce qui conduit au code ci-dessous :

Listing 1 : calcul d'une valeur approchée de $\mathrm{S}(x)$

```
function y=evalS(x,eps)
  y=0; // initialisation des sommes partielles
  for k=1:(floor(1/eps^(1/x)))
    y=y+(-1)^(k+1)/k^x;
  end
endfunction
```

3. Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $p \in \mathbb{N}^*$, il vient :

$$\sum_{k=1}^{2p} \frac{(-1)^{k+1}}{k^x} = \sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant 2p \\ k \text{ impair}}} \frac{1}{k^x} - \sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant 2p \\ k \text{ pair}}} \frac{1}{k^x} = \sum_{j=1}^{p} \frac{1}{(2j-1)^x} - \sum_{j=1}^{p} \frac{1}{(2j)^x} = \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{(2k-1)^x} - \frac{1}{2^x} \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k^x}$$

d'où

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{2p} \frac{(-1)^{k+1}}{k^x} &= \left(\sum_{j=1}^{p} \frac{1}{(2j-1)^x} + \sum_{j=1}^{p} \frac{1}{(2j)^x}\right) - \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{(2k)^x} - \frac{1}{2^x} \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k^x} \\ &= \left(\sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant 2p \\ k \text{ impair}}} \frac{1}{k^x} + \sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant 2p \\ k \text{ pair}}} \frac{1}{k^x}\right) - \frac{2}{2^x} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^x} = \sum_{k=1}^{2p} \frac{1}{k^x} - \frac{1}{2^{x-1}} \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k^x}.\end{aligned}$$

4. a. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, la seconde formule de la question **3.** appliquée à $p = n$ et $x = 1$ donne, en décalant les indices après simplification :

$$v_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}}.$$

b. La question **a.** fait apparaître v_n comme somme de Riemann associée à la fonction $t \longmapsto \frac{1}{1+t}$, continue sur le segment $[0,1]$. Par théorème, on a donc :

$$v_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t} = \ln 2.$$

Sachant par ailleurs que $(v_n)_{n\geqslant 1} = (u_{2n})_{n\geqslant 1}$ converge vers $\mathrm{S}(x)$ d'après **2.a.**, on en déduit par unicité de la limite que $\mathrm{S}(1) = \ln 2$.

5. D'après le résultat admis,

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

d'où, en passant à la limite lorsque $p = n \to \infty$ dans la formule de la question **3.** avec $x = 2$, la valeur de

$$\mathrm{S}(2) = \Big(1 - \frac{1}{2}\Big)\frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{12}.$$

Deuxième partie

6. La fonction $g_x : t \longmapsto \frac{t^x}{1+\mathbf{e}^t}$ est continue sur $]0, +\infty[$.

➢ Lorsque $t \to 0$, $g_x(t) \sim \frac{1}{2t^{-x}} \geqslant 0$ si bien, par comparaison à l'intégrale de Riemann $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^{-x}}$, que l'intégrale $\int_0^1 g_x(t)\,\mathrm{d}t$ converge si, et seulement si, $-x < 1$ i.e. $x > -1$.

➢ Lorsque $t \to +\infty$, $0 \leqslant g_x(t) \sim t^x\mathbf{e}^{-t} = o\big(\frac{1}{t^2} \geqslant 0\big)$, ce qui justifie la convergence de l'intégrale $\int_1^{+\infty} g_x(t)\,\mathrm{d}t$ par comparaison à l'intégrale de Riemann convergente $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$.

En conclusion, l'intégrale $\int_0^{+\infty} g_x(t)\,\mathrm{d}t$ converge si, et seulement si, $x > -1$.

7. a. Pour $t > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a $-\mathbf{e}^{-t} \neq 1$ d'où :

$$\begin{aligned}(-1)^n g_x(t)\mathbf{e}^{-nt} + \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} t^x \mathbf{e}^{-kt} &= (-1)^n g_x(t)\mathbf{e}^{-nt} - t^x \sum_{k=1}^{n} (-\mathbf{e}^{-t})^k \\ &= (-1)^n g_x(t)\mathbf{e}^{-nt} + t^x\mathbf{e}^{-t}\frac{1-(-\mathbf{e}^{-t})^n}{1+\mathbf{e}^{-t}} \\ &= (-1)^n g_x(t)\mathbf{e}^{-nt} + g_x(t)\big(1-(-1)^n\mathbf{e}^{-nt}\big) = g_x(t).\end{aligned}$$

b. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, le changement de variable affine $u = kt$ apporte à la fois la convergence et la valeur de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} t^x\mathbf{e}^{-kt}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \Big(\frac{u}{k}\Big)^x \mathbf{e}^{-u}\frac{\mathrm{d}u}{k} = \frac{1}{k^{x+1}}\int_0^{+\infty} u^x\mathbf{e}^{-u}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{k^{x+1}}\Gamma(x+1).$$

En effet, l'intégrale définissant $\Gamma(x+1)$ converge puisque $x > -1$ par hypothèse.

c. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $t \longmapsto g_x(t)\mathbf{e}^{-nt}$ est continue sur $]0, +\infty[$ avec :

$$\forall t > 0, \quad 0 \leqslant g_x(t)\mathbf{e}^{-nt} = \frac{t^x}{1+\mathbf{e}^t}\mathbf{e}^{-nt} \leqslant t^x\mathbf{e}^{-nt}$$

d'où l'on déduit, d'après la question **b.**, la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} g_x(t)\mathbf{e}^{-nt}\,\mathrm{d}t$ et les inégalités

$$0 \leqslant \int_0^{+\infty} g_x(t)\mathbf{e}^{-nt}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{+\infty} t^x\mathbf{e}^{-nt}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n^{x+1}}\Gamma(x+1) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Il en ressort par encadrement que :

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{+\infty} g_x(t)\mathbf{e}^{-nt}\,\mathrm{d}t = 0.$$

d. Il vient d'après **a.**, toutes intégrales convergentes vu **b.** et **c.** :

$$\begin{aligned}\mathrm{I}(x) = \int_0^{+\infty} g_x(t)\,\mathrm{d}t &= (-1)^n \int_0^{+\infty} g_x(t)\mathbf{e}^{-nt}\,\mathrm{d}t + \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\int_0^{+\infty} t^x\mathbf{e}^{-kt}\,\mathrm{d}t \\ &= (-1)^n \int_0^{+\infty} g_x(t)\mathbf{e}^{-nt}\,\mathrm{d}t + \Big(\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k^{x+1}}\Big)\Gamma(x+1)\end{aligned}$$

d'où, par passage à la limite lorsque $n \to \infty$, vu **2.c.** et **c.**,

$$\mathrm{I}(x) = \Big(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^{x+1}}\Big)\Gamma(x+1) = \mathrm{S}(x+1)\Gamma(x+1).$$

8. D'après les questions **5.** et **7.d.**, $\mathrm{I}(1) = \mathrm{S}(2)\Gamma(2) = \frac{\pi^2}{12}$.

Troisième partie

9. Il vient immédiatement :

$$\forall t\in\mathbb{R},\quad f(-t)=\frac{\mathbf{e}^{-t}}{(1+\mathbf{e}^{-t})^2}=\frac{\mathbf{e}^{t}}{\mathbf{e}^{2t}(1+\mathbf{e}^{-t})^2}=\frac{\mathbf{e}^{t}}{(\mathbf{e}^{t}+1)^2}=f(t)$$

ce qui prouve que la fonction f est paire.

10. La fonction f est continue et positive sur $\mathbb{R}$. De plus,

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{-1}{1+\mathbf{e}^x}+k$$

admet des limites finies en $-\infty$ et $+\infty$, ce qui justifie la convergence de l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t=\lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{1+\mathbf{e}^x}-\lim_{x\to-\infty}\frac{-1}{1+\mathbf{e}^x}=0-(-1)=1.$$

La fonction f est donc une densité de probabilité.

11. La fonction de répartition $\mathrm{F_X}$ de X est donnée par :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad \mathrm{F_X}(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t=\left[\frac{-1}{1+\mathbf{e}^t}\right]_{-\infty}^{x}=1-\frac{1}{1+\mathbf{e}^x}=\frac{\mathbf{e}^x}{1+\mathbf{e}^x}=\frac{1}{1+\mathbf{e}^{-x}}.$$

12. a. La fonction $t\longmapsto t^nf(t)$ est continue sur $[0,+\infty[$ avec $0\leqslant t^nf(t)\sim t^n\mathbf{e}^{-t}=o\big(\frac{1}{t^2}\geqslant 0\big)$ lorsque $t\to+\infty$, ce qui assure la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty}t^nf(t)\,\mathrm{d}t$ par comparaison à l'intégrale de Riemann convergente $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^2}$.

Grâce au changement de variable affine $u=-t$, on en déduit par parité de f la convergence de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} t^nf(t)\,\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{0}(-u)^nf(-u)\,\mathrm{d}u=(-1)^n\int_{-\infty}^{0}u^nf(u)\,\mathrm{d}u, \tag{1}$$

donc de $\int_{-\infty}^{0}t^nf(t)\,\mathrm{d}t$ et finalement celle de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty}t^nf(t)\,\mathrm{d}t$, ce qui signifie que la variable X admet un moment d'ordre n.

b. D'après la formule (1),

$$m_n(\mathrm{X})=\int_{-\infty}^{0}t^nf(t)\,\mathrm{d}t+\int_0^{+\infty}t^nf(t)\,\mathrm{d}t=\big((-1)^n+1\big)\int_0^{+\infty}t^nf(t)\,\mathrm{d}t. \tag{2}$$

Il en ressort pour n impair que :

$$\forall p\in\mathbb{N},\quad m_{2p+1}(\mathrm{X})=0.$$

c. Par intégration par parties sur $[0,x]\subset[0,+\infty[$, il vient :

$$\int_0^x t^{2p}\frac{\mathbf{e}^t}{(1+\mathbf{e}^t)^2}\,\mathrm{d}t=\left[t^{2p}\frac{-1}{1+\mathbf{e}^t}\right]_0^x-\int_0^x 2pt^{2p-1}\frac{-1}{1+\mathbf{e}^t}\,\mathrm{d}t=-\frac{x^{2p}}{1+\mathbf{e}^x}+2p\int_0^x\frac{t^{2p-1}}{1+\mathbf{e}^t}\,\mathrm{d}t$$

d'où, par passage à la limite lorsque $x\to+\infty$,

$$\int_0^{+\infty}t^{2p}f(t)\,\mathrm{d}t=2p\int_0^{+\infty}\frac{t^{2p-1}}{1+\mathbf{e}^t}\,\mathrm{d}t=2p\mathrm{I}(2p-1).$$

Vu la relation (2), on en déduit que :

$$m_{2p}(\mathrm{X})=2\int_0^{+\infty}t^{2p}f(t)\,\mathrm{d}t=4p\mathrm{I}(2p-1).$$

13. Les questions **12.b.** et **12.c.** donnent l'existence et la valeur de $\mathbb{E}(\mathrm{X})=m_1(\mathrm{X})=0$ et de $\mathbb{E}(\mathrm{X}^2)=m_2(\mathrm{X})=4\mathrm{I}(1)=\frac{\pi^2}{3}$. On en déduit, d'après la formule de Kœnig-Huygens, l'existence et la valeur de

$$\mathbb{V}(\mathrm{X})=\mathbb{E}(\mathrm{X}^2)-\mathbb{E}(\mathrm{X})^2=\frac{\pi^2}{3}.$$

14. a. Pour $n\in\mathbb{N}^*$, il vient classiquement par indépendance de $\mathrm{X}_1,\dots,\mathrm{X}_n$:

$$\begin{aligned}\forall x\in\mathbb{R},\quad \mathrm{F}_{\mathrm{Y}_n}(x)&=\mathbb{P}(\mathrm{Y}_n\leqslant x)=\mathbb{P}\big(\max(\mathrm{X}_1,\dots,\mathrm{X}_n)\leqslant x\big)=\mathbb{P}(\mathrm{X}_1\leqslant x,\dots,\mathrm{X}_n\leqslant x)\\&=\mathbb{P}(\mathrm{X}_1\leqslant x)\cdots\mathbb{P}(\mathrm{X}_n\leqslant x)=\mathrm{F_X}(x)^n.\end{aligned}$$

On en déduit, d'après la question **11.**, que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{F}_{\mathrm{Z}_n}(x) = \mathbb{P}(\mathrm{Z}_n \leqslant x) = \mathbb{P}(\mathrm{Y}_n \leqslant x + \ln n) = \mathrm{F}_{\mathrm{X}}(x + \ln n)^n = \Big(1 + \frac{\mathbf{e}^{-x}}{n}\Big)^{-n}$$

b. Pour $x \in \mathbb{R}$, il vient d'après **a.** :

$$\begin{aligned} \mathrm{F}_{\mathrm{Z}_n}(x) &= \exp\Big[-n\ln\Big(1 + \frac{\mathbf{e}^{-x}}{n}\Big)\Big] = \exp\Big[-n\Big(\frac{\mathbf{e}^{-x}}{n} + o\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big)\Big], \quad n \to \infty. \\ &= \exp\big(-\mathbf{e}^{-x} + o(1)\big) \to \exp(-\mathbf{e}^{-x}) \end{aligned}$$

La fonction limite $\mathrm{F} : x \longmapsto \exp(-\mathbf{e}^{-x})$ est croissante et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, de limites respectives 0 et 1 en $-\infty$ et $+\infty$. C'est donc la fonction de répartition d'une variable Z à densité

$$f_{\mathrm{Z}} : x \in \mathbb{R} \longmapsto \mathbf{e}^{-x} \exp(-\mathbf{e}^{-x}).$$

La limite obtenue ci-dessus établit la convergence en loi de la suite $(\mathrm{Z}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vers la variable Z.