

## Devoir en temps libre 5/2 pour le lundi 16 septembre

### Notations

Dans tout le problème,  $n$  désigne un entier naturel non nul ( $n \in \mathbb{N}^*$ ).

— Dans  $\mathcal{E}_n = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  espace vectoriel réel de dimension  $n$ , on utilisera le produit scalaire canonique défini par

$$\forall U, V \in \mathcal{E}_n, (U|V) = U^T V$$

- On notera  $\mathcal{M}_n = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , l'espace vectoriel des matrices carrées de taille  $n$  à coefficients réels.
- Pour  $A \in \mathcal{M}_n$ , on notera  $\text{Ker}(A)$  le noyau de  $A$  vu comme endomorphisme de  $\mathcal{E}_n$ .
- Dans  $\mathcal{M}_n$ , on notera  $0_n$  la matrice nulle et  $I_n$  la matrice unité. Le déterminant est noté  $\det$ .
- $\mathcal{G}_n = GL_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n, \det(M) \neq 0\}$  désigne le groupe linéaire des matrices inversibles de  $\mathcal{M}_n$ .
- $\mathcal{O}_n = \{M \in \mathcal{M}_n, M^T M = I_n\}$  désigne le groupe orthogonal d'indice  $n$ , formé des matrices orthogonales de  $\mathcal{M}_n$ .
- On sera enfin amené à utiliser des décompositions par blocs. On rappelle en particulier que si  $A, B, C, D, A', B', C', D' \in \mathcal{M}_n$  on a alors dans  $\mathcal{M}_{2n}$  :

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AA' + BC' & AB' + BD' \\ CA' + DC' & CB' + DD' \end{pmatrix}$$

$$\det \left( \begin{pmatrix} A & C \\ 0_n & D \end{pmatrix} \right) = \det \left( \begin{pmatrix} A & 0_n \\ C & D \end{pmatrix} \right) = \det(A) \det(D)$$

### 0.1 Le groupe symplectique

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et soit  $J_n$  ou simplement  $J$  la matrice de  $\mathcal{M}_{2n}$  définie par

$$J = \begin{pmatrix} 0_n & -I_n \\ I_n & 0_n \end{pmatrix}$$

On note

$$\mathcal{S}_{p_{2n}} = \{M \in \mathcal{M}_{2n}, M^T J M = J\}$$

1. Calculer  $J^2$  et  $J^T$  en fonction de  $I_{2n}$  et  $J$ . Montrer que  $J$  est inversible et identifier son inverse.
2. Vérifier que  $J \in \mathcal{S}_{p_{2n}}$  et que pour tout réel  $\alpha$ ,

$$K(\alpha) = \begin{pmatrix} I_n & 0_n \\ -\alpha I_n & I_n \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_{p_{2n}}$$

3. Pour tout  $U \in \mathcal{G}_n$ , vérifier que  $L_U = \begin{pmatrix} U & 0_n \\ 0_n & (U^{-1})^T \end{pmatrix}$  est dans  $\mathcal{S}_{p_{2n}}$ .
4. Si  $M \in \mathcal{S}_{p_{2n}}$ , préciser les valeurs possibles de  $\det(M)$ .
5. Montrer que le produit de deux éléments de  $\mathcal{S}_{p_{2n}}$  est un élément de  $\mathcal{S}_{p_{2n}}$ .
6. Montrer qu'un élément de  $\mathcal{S}_{p_{2n}}$  est inversible et que son inverse appartient à  $\mathcal{S}_{p_{2n}}$ .
7. Montrer que si  $M \in \mathcal{S}_{p_{2n}}$  alors  $M^T \in \mathcal{S}_{p_{2n}}$ .

Soit  $M$  une matrice de  $\mathcal{M}_{2n}$  écrite sous la forme

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \text{ avec } A, B, C, D \in \mathcal{M}_n$$

8. Déterminer les relations sur  $A, B, C, D$  caractérisant l'appartenance de  $M$  à  $\mathcal{S}_{p_{2n}}$ .

### 0.2 Centre de $\mathcal{S}_{p_{2n}}$

On s'intéresse ici au centre  $\mathcal{Z}$  de  $\mathcal{S}_{p_{2n}}$  c'est à dire

$$\mathcal{Z} = \{M \in \mathcal{S}_{p_{2n}}, \forall N \in \mathcal{S}_{p_{2n}}, MN = NM\}$$

9. Justifier l'inclusion suivante :  $\{-I_{2n}, I_{2n}\} \subset \mathcal{Z}$ .

Réciproquement, soit  $M \in \mathcal{Z}$  écrite sous la forme

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \text{ avec } A, B, C, D \in \mathcal{M}_n$$

10. En utilisant  $L = \begin{pmatrix} I_n & I_n \\ 0_n & I_n \end{pmatrix}$  et sa transposée, obtenir  $B = C = 0_n$  et  $D = A$ ,  $A$  étant inversible.
11. Soit  $U \in \mathcal{G}_n$ . En utilisant  $L_U = \begin{pmatrix} U & 0_n \\ 0_n & (U^{-1})^T \end{pmatrix}$ , montrer que  $A$  commute avec toute matrice  $U \in \mathcal{G}_n$ .
12. Conclure que  $A \in \{-I_n, I_n\}$  et  $\mathcal{Z} = \{-I_{2n}, I_{2n}\}$ . *Indication : on montrera d'abord que les matrices  $I_n + E_{i,j}$  commutent avec  $A$ , où  $(E_{i,j}, 1 \leq i, j \leq n)$  est la base canonique de  $\mathcal{M}_n$ .*

### 0.3 Déterminant d'une matrice symplectique

Soit  $M$  dans  $\mathcal{S}_{p_{2n}}$  que l'on décompose sous forme de matrice blocs

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \tag{1}$$

avec  $A, B, C, D \in \mathcal{M}_n$ . Dans toute cette partie, les matrices  $A, B, C, D$  sont les matrices de cette décomposition.

On suppose dans les questions 13 et 14 que  $D$  est inversible.

13. Montrer qu'il existe quatre matrices  $Q, U, V, W$  de  $\mathcal{M}_n$  telles que

$$\begin{pmatrix} I_n & Q \\ 0_n & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U & 0_n \\ V & W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

14. En utilisant la question 8, vérifier que  $BD^{-1}$  est symétrique, puis que

$$\det(M) = \det(A^T D - C^T B) = 1$$

Soient  $P, Q \in \mathcal{M}_n$  telles que  $P^T Q$  soit symétrique et  $Q$  non inversible. On suppose qu'il existe deux réels différents  $s_1, s_2$  et deux vecteurs  $V_1, V_2$  non nuls dans  $\mathcal{E}_n$  tels que

$$(Q - s_1 P)V_1 = (Q - s_2 P)V_2 = 0$$

15. Montrer que le produit scalaire  $(QV_1 | QV_2)$  est nil.

On suppose dorénavant  $D$  non inversible.

16. Montrer que  $\text{Ker}(B) \cap \text{Ker}(D) = \{0\}$ .

Soit  $m$  un entier,  $m \leq n$ . Soit  $s_1, \dots, s_m$  des réels non nuls et deux à deux distincts et  $V_1, \dots, V_m$  des vecteurs non nuls tels que

$$(D - s_i B)V_i = 0 \text{ pour } i = 1, \dots, m$$

17. Montrer que pour tout  $i \in \{1, \dots, m\}$ ,  $DV_i \neq 0$  et que la famille  $(DV_i, i = 1, \dots, m)$  forme un système libre de  $\mathcal{E}_n$ .
18. En déduire qu'il existe un réel  $\alpha$  tel que  $D - \alpha B$  soit inversible.
19. Montrer alors que toute matrice de  $\mathcal{S}_{p_{2n}}$  est de déterminant égal à 1.