Pour le 21 septembre 2018, 12h dernier délai.

PROBLÈME 1

PARTIE I :

On considère, dans cette partie, les matrices de $\mathbf{M}_3(\mathbb{R})$: $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -5 & 9 & 0 \\ -5 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ et $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Trouver, en fonction de I_3 et de A, deux matrices P_1 et P_2 de $\mathbf{M}_3(\mathbb{R})$ telles que :

$$P_1 + P_2 = I_3 \quad \text{et} \quad 4P_1 + 9P_2 = A.$$

Expliciter ensuite les coefficients de P_1 et ceux de P_2.

2. **a.** Calculer les matrices $P_1^2,\ P_1P_2,\ P_2P_1$ et P_2^2.

b. En déduire : $\forall k \in \mathbb{N}, A^k = 4^k P_1 + 9^k P_2$.

3. Trouver au moins une matrice B de $\mathbf{M}_3(\mathbb{R})$, dont on explicitera les coefficients, telle que $B^2 = A$.

4. ***Définition :*** *on dit que λ est une valeur propre de A si et seulement s'il existe une matrice colonne $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ NON NULLE telle que $AX = \lambda \cdot X$.*
Quelles sont les valeurs propres de A ?

Dans toute la suite du problème, E désigne un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie supérieure ou égale à 1 et f un endomorphisme de E.
On note e l'endomorphisme identité de E qui, à chaque élément de E, associe lui-même, et $\tilde{0}$ l'endomorphisme nul de E qui, à chaque élément de E, associe l'élément nul de E.
On suppose qu'il existe un entier m de $\mathbb{N}^*$, des réels $\lambda_1, ..., \lambda_m$ deux à deux distincts et des endomorphismes $p_1, ..., p_m$ de E tous différents de $\tilde{0}$, tels que : $\forall k \in [\![0; m]\!],\ f^k = \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \lambda_i^k p_i$.
Enfin on considère les polynômes :

$$N = \prod_{\ell=1}^{m}(X - \lambda_\ell) \text{ et pour tout } i \text{ de } [\![1; m]\!],\ M_i = \prod_{\substack{1\leqslant \ell \leqslant m \\ \ell \neq i}} (X - \lambda_\ell) \text{ et } L_i = \frac{1}{M_i(\lambda_i)} M_i.$$

On admet que, pour tous polynômes P et Q de $\mathbb{R}[X]$: $(P \times Q)(f) = P(f) \circ Q(f)$.

PARTIE II : Étude des puissances de f

5. Montrer, pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_m[X]$: $P(f) = \displaystyle\sum_{i=1}^{m} P(\lambda_i) p_i$.

6. En déduire : $N(f) = \tilde{0}$.

7. **a.** Montrer que, pour tout couple (i, j) de $[\![1; m]\!]^2$, $L_i(\lambda_j)$ est égale à 1 si $i = j$ et égal à 0 si $i \neq j$.

b. En déduire, pour tout i de $[\![1; m]\!]$: $L_i(f) = p_i$.

8. **a.** Montrer : $e = \displaystyle\sum_{i=1}^{m} p_i$.

b. En déduire que E est la somme des m sous-espaces vectoriels $\mathrm{Im}(p_1), ..., \mathrm{Im}(p_m)$.

9. Soit i appartenant à $[\![1; m]\!]$.

a. Vérifier : $N = M_i(\lambda_i)(X - \lambda_i)L_i$.

b. En déduire, en utilisant le résultat de la question **6.** : $\mathrm{Im}(p_i) \subset \mathrm{Ker}(f - \lambda_i\, e)$.

10. Déduire des questions précédentes que $E = \sum_{i=1}^{m} \mathrm{Ker}(f - \lambda_i\, e)$ et que chaque $\mathrm{Ker}(f - \lambda_i\, e)$ n'est pas réduit à $\{0\}$.
On admet que cette somme est directe. Montrer que, pour i de $[\![1; m]\!]$, $\mathrm{Ker}(f - \lambda_i\, e) = \mathrm{Im}(p_i)$.

11. **a.** Montrer, pour tout couple (i, j) de $[\![1; m]\!]^2$ tel que $i \neq j$: $\quad p_i \circ p_j = \tilde{0}$.

b. En déduire, en utilisant le résultat de la question **8.a.**, pour i de $[\![1;m]\!]$: $\quad p_i \circ p_i = p_i$.

c. Établir, pour tout i de $[\![1;m]\!]$: $\quad p_i \circ f = \lambda_i p_i$.

12. Montrer : $\quad \forall k \in \mathbb{N},\ f^k = \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \lambda_i^k\, p_i,\quad$ puis, pour tout polynôme P de $\mathbb{R}[X]$: $\quad P(f) = \displaystyle\sum_{i=1}^{m} P(\lambda_i) p_i$.

PARTIE III : Intervention de produit scalaire

On munit le $\mathbb{R}$-espace vectoriel E d'un produit scalaire $\langle .,. \rangle$.
On considère l'application φ de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ définie, pour tout $(x,y) \in E \times E$, par

$$\varphi(x,y) = \sum_{i=1}^{m} \langle p_i(x), p_i(y) \rangle.$$

13. Montrer que φ est un produit scalaire sur E.

On remarquera qu'ainsi E est muni de deux produits scalaires, $\langle .,. \rangle$ et φ.

14. Montrer que pour tout $(x,y) \in E$, $\varphi(f(x),y) = \varphi(x,f(y))$.

15. Démontrer que, pour tout i de $[\![1;m]\!]$, p_i est un projecteur sur $\mathrm{Im}(p_i)$ et que $\mathrm{Ker}(p_i)$ et $\mathrm{Im}(p_i)$ sont des espaces orthogonaux pour le produit scalaire φ.

PROBLÈME 2

On s'intéresse dans cette partie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, à la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^{n+1}}{n^x}$.

1. Justifier que, pour tout $x \in \mathbb{R}^-$, la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^{n+1}}{n^x}$ diverge.

2. Soit $x \in \mathbb{R}^{+*}$. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k^x}$.

a. Montrer que les suites $(u_{2p})_{p\in\mathbb{N}^*}$ et $(u_{2p-1})_{p\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes, puis en déduire qu'elles convergent vers une même limite notée $S(x)$.

b. En déduire : $\quad \forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}^* \setminus \forall n \geqslant n_0,\ |u_n - S(x)| \leqslant \varepsilon$.

c. Justifier alors que la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^{n+1}}{n^x}$ converge et que l'on a : $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^x}$.

d. Justifier : $\quad \forall p \in \mathbb{N}^*, \quad u_{2p} \leqslant S(x) \leqslant u_{2p+1} \leqslant u_{2p-1}$.

e. En déduire : $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad |S(x) - u_n| \leqslant \dfrac{1}{(n+1)^x}$.

On pourra séparer les cas n pair et n impair.

3. Soient $x \in \mathbb{R}^{+*}$ et $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer :

$$\sum_{k=1}^{2p} \frac{(-1)^{k+1}}{k^x} = \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{(2k-1)^x} - \frac{1}{2^x}\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{k^x} \qquad \text{puis :} \qquad \sum_{k=1}^{2p} \frac{(-1)^{k+1}}{k^x} = \sum_{k=1}^{2p} \frac{1}{k^x} - \frac{1}{2^{x-1}}\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{k^x}.$$

4. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$.

a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer, en utilisant la question **3.** : $\quad v_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}}$.

b. En déduire la convergence et la limite de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, puis la valeur de $S(1)$.

5. On admet que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Déterminer la valeur de $S(2)$.

Rapport de DL1 :

1. RAS.
2. **a.** RAS.

   b. On peut faire une récurrence. Attention : l'hérédité commence par "Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que P_n est vraie" et non par "Supposons que P_n est vraie ~~à partir d'~~un certain rang". En effet, si vous supposer P_n vraie pour tout $n \geq N$, il n'y a rien à prouver pour $n+1$...

   On peut aussi utiliser la formule du binôme de Newton, À CONDITION de mentionner que P_1 et P_2 commutent !!!
3. La question 2.b. incite à regarder $\sqrt{4}P_1 + \sqrt{9}P_2$.

   On peut aussi chercher une matrice $B = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7 & a_8 & a_9 \end{pmatrix}$ telle que $B^2 = A$. On peut même se dire que B pourrait être triangulaire inférieure comme A, ce qui réduit le nombre d'inconnues.

   Les plus savants ont finalement perdu un peu de temps en diagonalisant la matrice A.
4. La matrice A est de format (3,3). Il est raisonnable de résoudre le système $(A - \lambda I_3)X = 0$ et de chercher les valeurs λ telles que ce système n'est pas inversible ! Surtout que le système obtenu est triangulaire inférieur !!!

   Cette question peut donc être rapidement rédigée sans utiliser d'arguments de déterminant ou de polynôme caractéristique...
5. Moins abordée, souvent maladroitement, alors qu'il suffit d'utiliser les hypothèses : on sait que pour tout k, $f^k = \sum \lambda_i^k p_i$. Donc une combinaison linéaire des f^k est égale à la même combinaison linéaire des $\sum \lambda_i^k p_i$. Si on fait la distinction entre un scalaire (λ_i) et une application linéaire (p_i), le résultat en découle en 3 lignes... Attention à ne pas écrire des choses qui n'ont pas de sens !
6. Lorsque la question est abordée, elle est plutôt bien faite.
7. **a.** Idem

   b. Idem
8. **a.** Peu pensent à écrire que $e = f^0$. Le reste en découle.

   b. Une question b. utilise généralement la question a....

   On doit démontrer l'égalité entre deux ensembles. L'autre inclusion étant facile, il suffit donc de montrer que $E \subset \sum Im(p_i)$. Traduisez cette inclusion : il suffit de montrer que $\forall x \in E, x \in \sum Im(p_i)$. Que faire avec $x \in E$? l'injecter dans la relation de la question précédente. Ici encore , si on donne un sens à $x = \sum p_i(x)$, on comprend que la question est résolue...

   Le reste de la partie est peu abordé.

Troisième partie :

13. La difficulté réside dans la définition du produit scalaire. Il faut faire le reste, mais NE PAS EXPEDIER la démonstration de ce caractère défini !

    Ici, tout réside encore dans la ligne indispensable : $x = \sum p_i(x)$... Il suffit donc de montrer que tous les $p_i(x)$ sont nuls, ce qui est en général assez bien fait...

    La fin du problème est peu abordée.

Problème 2 :

1. Gros méli-mélo sur cette question. Encore une fois, si j'ai dit qu'on pouvait la regarder, c'est que c'est abordable avec des outils de 3/2 !!!

   PIÈGE : ça ressemble à une série de Riemann. En réalité, c'est une série de Riemann ALTERNÉE !!! (regardez bien les signes des termes de la série).

   Lorsqu'on étudie la convergence une série, on commence toujours par regarder si le terme général tend vers 0. Ici, ce n'est pas le cas pour $x \leq 0$. Il y a donc divergence grossière et c'est fini ! (on ne doit pas parler de séries de Riemann)

   Attention : pas de théorème de comparaison avec des séries alternées : les 5/2 doivent savoir qu'on ne fait que dire de grosses bêtises !
2. Les plus savants peuvent répondre en quelques lignes à toutes les questions 2.a., 2.b., ... , 2.e en utiliser le critère spécial des séries alternées. Ici, le but est d'en détailler la preuve dans un cas particulier, donc pas de précipitation...

   a. La majorité comprend que les sommes se télescopent, mais ATTENTION à l'exposant du (-1) pour obtenir les bons signes.

   Certains oublient de vérifier que $\lim u_{2k-1} - u_{2k} = 0$ et c'est regrettable ! Revoir la définition de suites adjacentes.

   b. C'est une capacité du programme de MPSI de savoir <u>démontrer</u> que si les suites extraites (u_{2k}) et (u_{2k+1}) sont convergentes vers une même limite, alors (u_n) converge vers cette limite commune.

   Pour cela, il est de bon ton d'utiliser les ε.

   La suite du pb est peu abordée.