Pour le 16 septembre 2016 :

PROBLÈME 1

PARTIE I :

On considère, dans cette partie, les matrices de $\mathbf{M}_3(\mathbb{R})$: $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -5 & 9 & 0 \\ -5 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ et $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Trouver, en fonction de I_3 et de A, deux matrices P_1 et P_2 de $\mathbf{M}_3(\mathbb{R})$ telles que :

$$P_1 + P_2 = I_3 \quad \text{et} \quad 4P_1 + 9P_2 = A.$$

Expliciter ensuite les coefficients de P_1 et ceux de P_2.

2. a. Calculer les matrices $P_1^2,\ P_1P_2,\ P_2P_1$ et P_2^2.

b. En déduire : $\forall k \in \mathbb{N}, A^k = 4^k P_1 + 9^k P_2$.

3. Trouver au moins une matrice B de $\mathbf{M}_3(\mathbb{R})$, dont on explicitera les coefficients, telle que $B^2 = A$.

4. ***Définition :*** *on dit que λ est une valeur propre de A si et seulement s'il existe une matrice colonne $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ NON NULLE telle que $AX = \lambda \cdot X$.*
Quelles sont les valeurs propres de A ?

Dans toute la suite du problème, E désigne un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie supérieure ou égale à 1 et f un endomorphisme de E.
On note e l'endomorphisme identité de E qui, à chaque élément de E, associe lui-même, et $\tilde{0}$ l'endomorphisme nul de E qui, à chaque élément de E, associe l'élément nul de E.
On suppose qu'il existe un entier m de $\mathbb{N}^*$, des réels $\lambda_1, ..., \lambda_m$ deux à deux distincts et des endomorphismes $p_1, ..., p_m$ de E tous différents de $\tilde{0}$, tels que : $\forall k \in [\![0; m]\!],\ f^k = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^k p_i$.
Enfin on considère les polynômes :

$$N = \prod_{\ell=1}^{m} (X - \lambda_\ell) \text{ et pour tout } i \text{ de } [\![1; m]\!],\ M_i = \prod_{\substack{1 \leqslant \ell \leqslant m \\ \ell \neq i}} (X - \lambda_\ell) \text{ et } L_i = \frac{1}{M_i(\lambda_i)} M_i.$$

On admet que, pour tous polynômes P et Q de $\mathbb{R}[X]$: $(P \times Q)(f) = P(f) \circ Q(f)$.

PARTIE II : Étude des puissances de f

5. Montrer, pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_m[X]$: $P(f) = \sum_{i=1}^{m} P(\lambda_i) p_i$.

6. En déduire : $N(f) = \tilde{0}$.

7. a. Montrer que, pour tout couple (i, j) de $[\![1; m]\!]^2$, $L_i(\lambda_j)$ est égale à 1 si $i = j$ et égal à 0 si $i \neq j$.

b. En déduire, pour tout i de $[\![1; m]\!]$: $L_i(f) = p_i$.

8. a. Montrer : $e = \sum_{i=1}^{m} p_i$.

b. En déduire que E est la somme des m sous-espaces vectoriels $\mathrm{Im}(p_1), ..., \mathrm{Im}(p_m)$.

9. Soit i appartenant à $[\![1; m]\!]$.

a. Vérifier : $N = M_i(\lambda_i)(X - \lambda_i)L_i$.

b. En déduire, en utilisant le résultat de la question **6.** : $\mathrm{Im}(p_i) \subset \mathrm{Ker}(f - \lambda_i\, e)$.

10. Déduire des questions précédentes que f est diagonalisable, que les valeurs propres de f sont les réels $\lambda_1, ..., \lambda_m$ et que, pour i de $[\![1; m]\!]$, le sous-espace propre de f associé à la valeur propre λ_i est $\mathrm{Im}(p_i)$.

11. a. Montrer, pour tout couple (i, j) de $[\![1; m]\!]^2$ tel que $i \neq j$: $\quad p_i \circ p_j = \tilde{0}$.

b. En déduire, en utilisant le résultat de la question **8.a.**, pour i de $[\![1; m]\!]$: $\quad p_i \circ p_i = p_i$.

c. Établir, pour tout i de $[\![1;m]\!]$: $\quad p_i \circ f = \lambda_i p_i$.

12. Montrer : $\quad \forall k \in \mathbb{N},\ f^k = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^k\, p_i,$ $\quad$ puis, pour tout polynôme P de $\mathbb{R}[X]$: $\quad P(f) = \sum_{i=1}^{m} P(\lambda_i) p_i$.

PARTIE III : Intervention de produit scalaire

On munit le $\mathbb{R}$-espace vectoriel E d'un produit scalaire $\langle .,. \rangle$.
On considère l'application φ de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ définie, pour tout $(x, y) \in E \times E$, par

$$\varphi(x, y) = \sum_{i=1}^{m} \langle p_i(x), p_i(y) \rangle.$$

13. Montrer que φ est un produit scalaire sur E.

On remarquera qu'ainsi E est muni de deux produits scalaires, $\langle .,. \rangle$ et φ.

14. Montrer que f est un endomorphisme symétrique de E pour le produit scalaire φ.
Quel résultat de la **partie II** peut-on alors retrouver sans calcul ?

15. Démontrer que, pour tout i de $[\![1;m]\!]$, p_i est le projecteur orthogonal sur $\mathrm{Im}(p_i)$ pour le produit scalaire φ.

PROBLÈME 2

PARTIE I : Étude d'une fonction définie par la somme d'une série

On s'intéresse dans cette partie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, à la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{(-1)^{n+1}}{n^x}$.

1. Justifier que, pour tout $x \in \mathbb{R}^-$, la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{(-1)^{n+1}}{n^x}$ diverge.

2. Soit $x \in \mathbb{R}^{+*}$. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k^x}$.

a. Montrer que les suites $(u_{2p})_{p \in \mathbb{N}^*}$ et $(u_{2p-1})_{p \in \mathbb{N}^*}$ sont adjacentes, puis en déduire qu'elles convergent vers une même limite notée $S(x)$.

b. En déduire : $\quad \forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}^* \setminus \forall n \geqslant n_0,\ |u_n - S(x)| \leqslant \varepsilon$.

c. Justifier alors que la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{(-1)^{n+1}}{n^x}$ converge et que l'on a : $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^x}$.

d. Justifier : $\quad \forall p \in \mathbb{N}^*, \quad u_{2p} \leqslant S(x) \leqslant u_{2p+1} \leqslant u_{2p-1}$.

e. En déduire : $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad |S(x) - u_n| \leqslant \frac{1}{(n+1)^x}$.

On pourra séparer les cas n pair et n impair.

f. En déduire une fonction Scilab qui, étant donnés deux réels $x > 0$ et $\varepsilon > 0$, renvoie une valeur approchée de $S(x)$ à ε près.

3. Soient $x \in \mathbb{R}^{+*}$ et $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer :

$$\sum_{k=1}^{2p} \frac{(-1)^{k+1}}{k^x} = \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{(2k-1)^x} - \frac{1}{2^x} \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k^x} \quad \text{puis :} \quad \sum_{k=1}^{2p} \frac{(-1)^{k+1}}{k^x} = \sum_{k=1}^{2p} \frac{1}{k^x} - \frac{1}{2^{x-1}} \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k^x}.$$

4. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$.

a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer, en utilisant la question **3.** : $\quad v_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1 + \frac{k}{n}}$.

b. En déduire la convergence et la limite de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, puis la valeur de $S(1)$.

5. On admet que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$. Déterminer la valeur de $S(2)$.

PARTIE II : Étude d'une fonction définie par une intégrale

Uniquement pour les 5/2 ou les 3/2 curieux qui auraient quelques notions concernant les intégrales généralisées.

On rappelle que la fonction Γ est définie sur $]0;+\infty[$ par : $\quad \forall x\in]0;+\infty[,\ \Gamma(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t$.

On rappelle également l'égalité suivante : $\quad \forall n\in\mathbb{N}^*,\ \Gamma(n)=(n-1)!$.

6. Soit $x\in\mathbb{R}$. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{t^x}{1+e^t}\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $x>-1$.

On pose, pour tout réel x de $]-1;+\infty[$, $I(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{t^x}{1+e^t}\mathrm{d}t$.

7. Soit $x\in]-1;+\infty[$. On définit la fonction $g_x:]0;+\infty[,\ t\mapsto\dfrac{t^x}{1+e^t}$.

a. Montrer : $\quad \forall n\in\mathbb{N}^*,\ \forall t\in\mathbb{R}^{+*},\ g_x(t)=(-1)^n g_x(t)e^{-nt}+\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}t^xe^{-kt}$.

b. Justifier, pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}t^xe^{-kt}\mathrm{d}t$ converge et que l'on a :

$$\int_0^{+\infty}t^xe^{-kt}\mathrm{d}t=\frac{1}{k^{x+1}}\Gamma(x+1).$$

c. Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}g_x(t)e^{-nt}\mathrm{d}t$ converge, puis que la limite de $\displaystyle\int_0^{+\infty}g_x(t)e^{-nt}\mathrm{d}t$, lorsque l'entier n tend vers $+\infty$, est égale à 0.

d. En déduire la relation : $\quad I(x)=S(x+1)\Gamma(x+1)$,
où la fonction S a été définie dans la partie **I**.

8. En utilisant la partie **I.**, déterminer la valeur de $I(1)$.

Conseils de lecture :

1. Exercice 8 d'analyse de la banque CCP 2016 (séries alternées)
2. Exercice 47 d'analyse de la banque CCP 2015 (sommes de Riemann)
3. Exercice 87 d'algèbre de la banque CCP 2016 (polynômes de Lagrange)
4. Exercice 90 d'algèbre de la banque CCP 2016 (polynômes de Lagrange)