Exercice 9 :

Soit $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable. On pose $f\colon \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \varphi(y/x)$.
Montrer que f vérifie la relation :

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0.$$

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\varphi(y/x) = \frac{-y}{x^2}\cdot\varphi'(y/x)$ *par dérivation d'une composée.*
$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\varphi(y/x) = \frac{1}{x}\cdot\varphi'(y/x)$
Donc $x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\frac{y}{x}\cdot\varphi'(y/x) + \frac{y}{x}\cdot\varphi'(y/x) = 0.$

Remarque :

Réciproquement, on peut montrer que si f vérifie la relation $x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$, alors il existe φ telle que $f(x,y) = \varphi(y/x)$
En effet, en posant $g(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$, on obtient : $r\cdot\frac{\partial g}{\partial r} = r\left(\cos\theta\frac{\partial f}{\partial x} + \sin\theta\frac{\partial f}{\partial y}\right)$
par la règle de la chaîne.
Donc f est solution ssi g est solution de $r\cdot\frac{\partial g}{\partial r} = 0$, donc $\frac{\partial g}{\partial r} = 0$.
Donc $g(r,\theta) = \phi(\theta)$, c'est à dire $f(x,y) = \phi(\arctan(y/x)) = \varphi(y/x)$.
De plus, si f est C^1, il faut φ de classe C^1.

Exercice 10 :

Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 des fonctions suivantes :
(1) : $f(x,y) = x^2(x+y)$ (2) : $f(x,y) = \cos(xy)$

On trouve $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2 + 2xy$ *et* $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2$.
Puis $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y) = 2x = \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y)$ *(calcul ou bien Th. de Schwarz)*
Enfin, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial x}(x,y) = 6x + 2y$ *et* $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial y}(x,y) = 0$

Remarque (hors programme, pour les plus motivés) : *on appelle Hessienne de f la matrice de taille 2 suivante :*

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial x}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial y}(x,y) \end{pmatrix}$$

Lorsque f est de classe C^2, cette matrice est symétrique (th. de Schwarz) réelle, donc ... diagonalisable par th. spectral !
Ses valeurs propres dépendent de (x,y). En (x_0,y_0) un point critique ($\nabla f(x_0,y_0) = 0$) :

- *si les deux valeurs propres sont strictement positives, le point critique est un minimum,*
- *si les les deux valeurs propres sont strictement négatives, le point critique est un maximum,*
- *l'une est strictement positives, l'autre strictement négative, le point critique n'est ni un maximum, ni un miminum (on parle de point col ou point selle).*
- *Si l'une des valeurs propres s'annule, on ne peut rien dire sans étude plus approfondie.*
  Exemple :
  Ici, $\nabla(f)(x,y) = (3x^2 + 2xy, x^2) = (0,0) \Leftrightarrow x = 0, y \in \mathbb{R}$.
  Tous les points de l'axe des ordonnées sont des points critiques.
  En un point $(0,y)$, la Hessienne est égale à

$$H_f(0,y) = \begin{pmatrix} 2y & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dans ce cas, on ne peut pas conclure de la nature des points critiques.

Pour la deuxième fonction, on trouve la Hessienne :

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}(x,y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial y}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y^2\cos(xy) & -xy\cos(xy) \\ -xy\cos(xy) & -x^2\cos(xy) \end{pmatrix}$$

Exercice 11 :

Soient $f\colon (x,y) \mapsto f(x,y)$ de classe $\mathcal{C}^2$ et $g\colon (r,\theta) \mapsto f(r\cos\theta, r\sin\theta)$.
Justifier que g est de classe $\mathcal{C}^2$ et exprimer

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

en fonction des dérivées partielles de g.

On pose $g(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$. Alors :

$$\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) = \cos\theta \frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) + \sin\theta \frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta)$$

$$\frac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta) = -r\sin\theta \frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) + r\cos\theta \frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta)$$

Au passage, en combinant les lignes du système, on peut calculer :
$\dfrac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) = \cos\theta \dfrac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) - \dfrac{1}{r}\sin\theta \dfrac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta)$
$\dfrac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta) = \sin\theta \dfrac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) + \dfrac{1}{r}\cos\theta \dfrac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta)$
Et trouver l'expression du gradient en polaire :

$$\nabla f(r\cos\theta, r\sin\theta) = (\cos\theta \frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) - \frac{1}{r}\sin\theta \frac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta), \sin\theta \frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) + \frac{1}{r}\cos\theta \frac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta))$$

Pour le Laplacien :
$\dfrac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r,\theta) = \cos\theta \left(\cos\theta \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(r\cos\theta, r\sin\theta) + \sin\theta \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) \right)$
. $\qquad + \sin\theta \left(\cos\theta \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta) + \sin\theta \dfrac{\partial^2 f}{\partial^2 y}(r\cos\theta, r\sin\theta) \right)$
$\dfrac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r,\theta) = \cos^2\theta \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(r\cos\theta, r\sin\theta) + 2\sin\theta\cos\theta \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) + \sin^2\theta \dfrac{\partial^2 f}{\partial^2 y}(r\cos\theta, r\sin\theta)$
Et $\dfrac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(r,\theta) = -r\cos\theta \dfrac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) - r\sin\theta \dfrac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta)$
. $\qquad + r^2\sin^2\theta \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(r\cos\theta, r\sin\theta) - 2r^2\sin\theta\cos\theta \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta)$
. $\qquad + r^2\cos^2\theta \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(r\cos\theta, r\sin\theta)$
Alors :
$\dfrac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r,\theta) + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(r,\theta) = \Delta f(r\cos\theta, r\sin\theta) - \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta) \right)$
$\dfrac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r,\theta) + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(r,\theta) = \Delta f(r\cos\theta, r\sin\theta) - \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial g}{\partial r}(r,\theta).$
Finalement :

$$\Delta f(x,y) = \frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r,\theta) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(r,\theta) + \frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta).$$

Exercice 12 :

Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable homogène de degré $n \in \mathbb{N}$ c'est-à-dire vérifiant

$$\forall t \in \mathbb{R}, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(tx,ty) = t^n f(x,y).$$

1. *Montrer que*

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = nf.$$

2. *On suppose $n \geqslant 1$. Montrer que les dérivées partielles de f sont elles aussi homogènes, préciser leur degré.*

Exercice 13 :

On considère la fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin(xy)}{|x|+|y|} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. *f est-elle continue ?*

2. *f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$?*

1. $|\sin(xy)| \sim_{(0,0)} |xy|$ *donc* $|f(x,y)| \sim \dfrac{|xy|}{|x|+|y|} \leqslant |y|\dfrac{|x|}{|x|+|y|} \leqslant |y|$ *tend vers 0 lorsque (x,y) tend vers $(0,0)$.*
Par comparaison, f tend vers 0 également et f est continue en $(0;0)$. Partout ailleurs, f est continue par théorèmes opératoires sur les fonctions continues.
Finalement f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

2. *De même, f est C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.*
Or pour $x > 0$ et $y > 0$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{y(x+y)\cos(xy) - \sin(xy)}{(x+y)^2}$.
Alors $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1/n,1/n) = \dfrac{2/n^2 \cdot \cos(1/n^2) - \sin(1/n^2)}{4/n^2} \longrightarrow \ell \neq 0 = \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$.
Donc $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ *n'est pas continue en 0 et f n'est pas C^1 !*

Exercice 14 :

Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. *Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.*

2. *Montrer que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$ existent et diffèrent. Qu'en déduire ?*

1. *Par composition, f est C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et* $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{y^3}{x^2+y^2} - \dfrac{2x^2y^3}{(x^2+y^2)^2}$ *et* $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{3xy^2}{x^2+y^2} - \dfrac{2xy^4}{(x^2+y^2)^2}$.
De plus, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0 = \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ *par dérivation des fonctions partielles ou par taux d'accroissement.*
Enfin, $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right| \leqslant |y|\dfrac{y^2}{x^2+y^2} + 2|y|\left(\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right)^2 \to 0$ *lorsque (x,y) tend vers $(0,0)$.*
De même, on montre que $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right| \to 0$.
D'après le cours, f est donc de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

2. *Par contre,* $\dfrac{1}{y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,y)\right) = 1$ *et* $\dfrac{1}{x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,0)\right) = 0$ *donc* $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$ *et par th. de Schwarz, f n'est pas de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$.*