Suites numériques (mpsi)

I — Rappels sur le corps des nombres réels

1) Ensembles de nombres

À partir d'un élément désigné par 0 et l'opération "successeur d'un nombre", on peut construire l'ensemble $\mathbb{N}$ et le munir de deux lois de composition interne $+$ et $\times$.
Le couple $(\mathbb{N},+)$ n'est pas un groupe (absence d'éléments symétriques). On construit l'ensemble $\mathbb{Z}$ pour que $\forall n \in \mathbb{N}$, l'équation $n+x=0$ admette une solution.
Le couple $(\mathbb{Z},+)$ est un groupe et le triplet $(\mathbb{Z},+,\times)$ est un anneau, mais pas un corps. On construit l'ensemble $\mathbb{Q}$ pour que $\forall n \in \mathbb{Z}, \forall m \in \mathbb{Z}^*$, l'équation $n+mx=0$ admette une solution. En particulier, tout élément non nul de $\mathbb{Q}$ est inversible pour $\times$: le triplet $(\mathbb{Q},+,\times)$ est un corps.
Ces constructions répondent à des problèmes "algébriques". L'étape suivante est plus "analytique".

Problème 1 : la fonction $f : x \mapsto x^2-2$ est continue, change de signe sur $[0,2]\cap\mathbb{Q}$, mais ne s'annule en aucun rationnel !
Le théorème des valeurs intermédiaires n'est donc pas valable dans $\mathbb{Q}$.
Problème 2 : la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^2-2}$ est définie, continue sur $[0,2]\cap\mathbb{Q}$, mais elle n'y est pas bornée car il existe des rationnels x tels que x^2-2 soit arbitrairement proche de 0.
Le théorème des bornes atteintes n'est donc pas valable dans $\mathbb{Q}$.

Ce sont 2 théorèmes d'analyse qui ne sont plus valables pour les fonctions définies sur $\mathbb{Q}$.

2) Construction de $\mathbb{R}$

Axiome de la borne supérieure *(1)*

(1) : *On admet l'existence d'un corps contenant $\mathbb{Q}$, archimédien, totalement ordonné, et dans lequel toute partie non vide et majorée admet une borne supérieure.*
(2) : *On montre alors que ce corps est unique à isomorphisme près. On le note $\mathbb{R}$.*

Et $\mathbb{C}$ alors ? $\mathbb{C}$ est construit à partir de $\mathbb{R}$ pour répondre à la résolution algébrique de l'équation $x^2+1=0$.

II — Rappels sur les suites numériques

1) Suites arithmétiques

Définition : *(2)*

Une suite (u_n) à valeurs complexes est dite arithmétique de raison $r \in \mathbb{C} \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + r$.

Propriétés : *(3)*

(1) : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 + nr = u_1 + (n-1)r$
(2) : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = \frac{(n+1)(u_0+u_n)}{2}$ = *(nombre de termes)* $\times$ *(demi somme du premier et du dernier terme).*

Cas matriciel : *(4)*

Une suite (M_n) *à valeurs dans* $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ *est dite* arithmétique de raison $R \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C}) \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, M_{n+1} = M_n + R$.

Alors $\forall n \in \mathbb{N}, M_n = M_0 + n \cdot R = M_1 + (n-1) \cdot R$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} M_k = \frac{n+1}{2} \cdot (M_0 + M_n)$

2) Suites géométriques

Définition : *(5)*

Une suite (u_n) *à valeurs complexes est dite* géométrique de raison $q \in \mathbb{C} \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = q \cdot u_n$.

Propriétés : *(6)*

(1) : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = q^n \cdot u_0 = q^{n-1} \cdot u_1$

(2) : $$\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0(1 + q + \cdots + q^n) = u_0 \cdot \sum_{k=0}^{n} q^k = \begin{cases} u_0 \cdot \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} & si\ q \neq 1 \\ u_0 \cdot (n+1) & si\ q = 1 \end{cases}$$

(3) : *Plus généralement, si* $q \neq 1$, $\sum_{k=p}^{n} q^k = q^p \cdot \dfrac{1-q^{n-p+1}}{1-q}$

Exercice 1 : Somme de sinus, cosinus, *sh*, *ch*

Donner une expression simplifiée de $\sum_{k=0}^{n} \sin(kx)$, $\sum_{k=0}^{n} \cos(kx)$, $\sum_{k=0}^{n} \mathrm{sh}(kx)$ *et* $\sum_{k=0}^{n} \mathrm{ch}(kx)$.

Factorisation de l'arc moitié : *(7)*

On retiendra que

$$e^{i\theta} - 1 = 2ie^{i\frac{\theta}{2}} \sin(\theta/2) \qquad et \qquad e^{i\theta} + 1 = 2e^{i\frac{\theta}{2}} \cos(\theta/2)$$

De même,

$$e^{x} - 1 = 2e^{\frac{x}{2}} \,\mathrm{sh}(x/2) \qquad et \qquad e^{x} + 1 = 2e^{\frac{x}{2}} \,\mathrm{ch}(x/2).$$

Cas matriciel : *(8)*

Une suite (M_n) *à valeurs dans* $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ *est dite* géométrique de raison $Q \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C}) \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, M_{n+1} = Q \times M_n$ (resp. $M_{n+1} = M_n \times Q$).
Alors $\forall n \in \mathbb{N}, M_n = Q^n M_0 = Q^{n-1} M_1$ (resp. $M_n = M_0 Q^n = M_1 Q^{n-1}$)
et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} M_k = ...$

Exercice 2 : Matrices nilpotentes :

Soit A une matrice nilpotente (c'est à dire, il existe $n_0 \geqslant 1$ tel que $A^{n_0} = 0$).
Montrer que $(I - A)$ est une matrice inversible et donner l'expression de la matrice $\sum_{k=0}^{+\infty} A^k$.

3) Suites arithmético-géométriques

Définition *(9)*

On dit que $(u_n)_{\mathbb{N}}$ *est une suite arithmético-géométrique ssi il existe a, b complexes avec $a \neq 1$ tels que*

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = au_n + b.$$

Exemples : $u_{n+1} = 4u_n + 3$, $3iu_n + 1$, $\dfrac{u_n}{2} + 3/4$... *sont arithmético-géométriques*

Contre-exemples : $u_{n+1} = \sqrt{u_n} + 2$, $3nu_n + 2$, $\dfrac{u_n}{2} + 2n$ *ne sont pas arithmético-géométriques.*

Propriétés *(10)*

(1) : *Le point fixe de la fonction* $f : x \mapsto ax + b$ *est* $\ell = \dfrac{b}{1-a}$.

(2) : *La suite* $(v_n)_{\mathbb{N}}$ *définie par* $v_n = u_n - \ell$ *est géométrique de raison* a *et converge ssi* $|a| < 1$ *car* $a \neq 1$.

(3) : *Donc* $v_n = a^n(u_0 - \ell)$ *et* $u_n = a^n(u_0 - \ell) + \ell$ *qui converge (pour tout* $u_0 \in \mathbb{C}$*) ssi* $|a| < 1$.

Dans ce cas, la limite est égale à ℓ.

4) Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Définition *(11)*

On dit que $(u_n)_{\mathbb{N}}$ *est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 ssi il existe* a, b *complexes tels que*

$$(E) : \qquad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n.$$

Exemple : $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ *est une relation de récurrence linéaire (suite de Fibonacci).*
Contre-exemple : $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n + n$, $u_{n+2} = 2nu_{n+1} + u_n$ *ne sont pas des relations de récurrence linéaire.*

Propriété *(12)*

On résout l'équation caratéristique $X^2 - aX - b = 0$ *de discriminant* Δ.

(1) : *si* $\Delta \neq 0$, *si* r_1, r_2 *sont les racines distinctes de l'eq. carac., alors*

$$\exists(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n.$$

Autrement dit, les suites géométriques (r_1^n) *et* (r_2^n) *engendrent l'espace vectoriel des suites satisfaisant la condition* (E).

(2) : *si* $\Delta = 0$, *si* r_1 *est la racine double de l'eq. carac., alors*

$$\exists(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = (\lambda + \mu n)r_1^n.$$

Autrement dit, les suites géométriques (r_1^n) *et* (nr_1^n) *engendrent l'espace vectoriel des suites satisfaisant la condition* (E).

Cas particulier réel : *si* a, b, u_0, u_1 *sont réels, la suite* (u_n) *est* ***réelle****. Si* $\Delta < 0$, *l'équation caractéristique admet deux solutions complexes non réelles et conjuguées* $\rho \exp(\pm i\theta)$.
Alors, $\exists(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = \rho^n(\lambda \cos(n\theta) + \mu \sin(n\theta))$.

Exercice 3 : Exemple :

Déterminer le terme général de la suite (u_n) *tel que* $u_0 = 1, u_1 = 2$ *et* $u_{n+2} = -(u_{n+1} + u_n)$

5) Suites récurrentes

Définition : *(13)*

Soit f *une fonction continue sur un intervalle* $I \subset \mathbb{R}$ *tel que* $f(I) \subset I$ *(on dit que* I *est un intervalle stable pour* f*. Soit* $u_0 \in I$. *On pose*

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n).$$

Proposition : *(14)*

(1) : f *admet au moins un point fixe dans* I *(démo. par TVI).*

(2) : **SI** (u_n) *est convergente vers* ℓ, *alors* $f(\ell) = \ell$.

cette condition nécessaire permet d'identifier rapidement les seules limites possible de (u_n)

(3) : **SI** f *est dérivable sur* I *et* **SI** $\exists a \in [0, 1[, \forall x \in I, |f'(x)| \leqslant a$ *(on dit que* f *est strictement contractante), alors :*

f *admet un* **unique** *point fixe noté* ℓ *et* $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \ell| \leqslant a^n |u_0 - \ell|$ *(démo. par récurrence)*

Par conséquent, la suite (u_n) *est convergente vers* ℓ.

Exercice 4 : Exemple :

Soit $u_0 \in \mathbb{R}$.

(1) : *Étudier la nature de la suite de terme général* $u_{n+1} = \dfrac{\cos(u_n)}{2}$.

(2) : *Étudier la nature de la suite de terme général* $u_{n+1} = \sin(u_n)$.

On pourra faire un dessin et commencer par étudier le cas $u_0 \in [-1, 1]$.

III — Convergence des suites numériques

1) Borne supérieure

Propriété : *(15)*

(1) : *Une partie non vide* A *de* $\mathbb{R}$ *est majorée s'il existe (au moins) un réel* M *appelé majorant tel que*

$$\forall x \in A, x \leqslant M$$

Dans ce cas, A *admet une infinité de majorants et on appelle borne supérieure de* A *le plus petit des majorants.*

(2) : *Donc, toute partie non vide et majorée de* $\mathbb{R}$ *admet une borne supérieure.*

Caractérisation : *(16)*

Soit A *une partie non vide et majorée de* $\mathbb{R}$ *et* M *un majorant de* A*. Alors :*
$M = \sup(A) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists a_\varepsilon \in A, M - \varepsilon \leqslant a_\varepsilon$

Exemple : *(17)*

L'ensemble $A = \{x \in \mathbb{Q} | x^2 \leqslant 2\}$ *est non vide (contient 0) et majoré par 2.*
A *admet une borne supérieure dans* $\mathbb{R}$ *mais pas dans* $\mathbb{Q}$.

2) Convergence d'une suite

Définition *(18)*

Soit $(u_n)_{\mathbb{N}}$ *une suite à valeurs dans* $\mathbb{C}$.

(1) : *On dit que* $(u_n)_{\mathbb{N}}$ *est convergente s'il existe* $\ell \in \mathbb{C}$ *tel que :*
$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon.$
Important : *on peut remplacer* $|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$ *par* $|u_n - \ell| \leqslant K\varepsilon$ *avec* $K > 0$ *fixé.*

$\Longleftrightarrow$ *tout voisinage de* ℓ *contient tous les termes de la suite sauf un nombre fini.*

$\Longleftrightarrow$ *tout voisinage de* ℓ *contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.*

(2) : *Une suite* $(u_n)_{\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ *diverge vers* $+\infty$ *ssi*

$$\forall A > 0, \exists N_A \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N_A \Rightarrow u_n > A.$$

Exemple : *la suite de terme général* $1/n$ *est convergente vers 0.*

Contre-exemples : *les suites* $((-1)^n)_{\mathbb{N}}$, $(\cos n)_{\mathbb{N}}$ *et* $(\ln n)_{\mathbb{N}^*}$ *ne sont pas convergentes (mais* $\ln n \to +\infty$*).*

Propriétés : *(19)*

Découlent de la définition ε*-esque :*

(1) : *Une suite convergente est bornée (sans réciproque).*

(2) : *Lorsqu'elle existe, la limite d'une suite est unique : si* $(u_n)_{\mathbb{N}}$ *converge vers* ℓ *et vers* ℓ'*, alors* $\ell = \ell'$.
Cela justifie la notation $\lim_{n\to\infty} u_n$.

(3) : *Opérations algébriques sur les limites (somme, combinaison linéaire, produit, inverse, quotient).*

(4) : *Si* $(u_n)_{\mathbb{N}}$ *est une suite réelle qui converge vers une limite* $\ell > 0$*, alors* u_n *est strictement positif à partir d'un certain rang.*

Exercice 5 : Complément important : Cesàro

Soit $(u_n)_{\mathbb{N}^*}$ *une suite convergente vers 0. On pose pour* $n \geqslant 1$, $v_n = \dfrac{\sum_{k=1}^{n} u_k}{n}$.
Soit $\varepsilon > 0$. *Montrer qu'il existe un rang* $N_{1,\varepsilon}$ *tel que*

$$\forall p \geqslant N_{1,\varepsilon}, \frac{\sum_{k=N_{1,\varepsilon}}^{p} u_k}{p} \leqslant \varepsilon.$$

En déduire que $v_n \to 0$.
Plus généralement, si une suite complexe converge vers ℓ, alors sa moyenne arithmétique converge aussi vers ℓ.
Ce résultat est encore valable si $\ell \in \{-\infty, +\infty\}$.

IV — Problème d'existence d'une limite

Parfois, il est difficile (voir impossible) de calculer la limite d'une suite. On se contente d'un résultat d'existence.

Mais comment montrer qu'une suite converge ou diverge ?

Théorèmes de limite monotone pour une suite réelle *(20)*

Si $(u_n)_{\mathbb{N}}$ *est croissante à partir d'un certain rang, alors elle admet une limite (éventuellement infinie) :*
(1) : $(u_n)_{\mathbb{N}}$ *converge ssi* $(u_n)_{\mathbb{N}}$ *est majorée.*
(2) : $(u_n)_{\mathbb{N}}$ *diverge vers* $+\infty$ *ssi* $(u_n)_{\mathbb{N}}$ *n'est pas majorée.*
Exemples :
(3) : *la suite* (u_n) *définie par* $u_0 = -1$ *et* $u_{n+1} = \exp(u_n) - 1$ *est croisante et majorée, donc convergente.*
(4) : *la suite* (u_n) *définie par* $u_0 = 1$ *et* $u_{n+1} = \exp(u_n) - 1$ *est croisante mais ne peut pas converger (absence de point fixe), donc diverge vers* $+\infty$.

Suites adjacentes *(21)*

(1) : *On dit que* $(u_n)_{\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{\mathbb{N}}$ *sont adjacentes ssi* $(u_n)_{\mathbb{N}}$ *est croissante,* $(v_n)_{\mathbb{N}}$ *est décroissante et* $u_n - v_n \to 0$.
(2) : *Si* $(u_n)_{\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{\mathbb{N}}$ *sont adjacentes, alors elles convergent vers la même limite.*

Théorèmes de comparaison pour les suites réelles : *(22)*

Soient $(u_n)_{\mathbb{N}}$, $(v_n)_{\mathbb{N}}$ *et* $(w_n)_{\mathbb{N}}$ *des suites réelles telles qu'à partir d'un certain rang :*

$$u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$$

(1) : *Si* $(u_n)_{\mathbb{N}}$ *et* $(w_n)_{\mathbb{N}}$ *convergent* **vers une même limite** ℓ, *alors la suite* $(v_n)_{\mathbb{N}}$ *converge vers* ℓ *également.*

V — Rudiments de topologie réelle

Définition : *(23)*

(1) : *On appelle extractrice toute fonction* $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *strictement croissante.*
Exemples : $\phi(n) = n, 2n, n^2, \dfrac{n(n+1)}{2}$ *sont des extractrices.*
Contre-exemples : $n \mapsto n/2, \exp(n)$ *ne sont pas des extractrices.*
Soit $(u_n)_{\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.
(2) : *On appelle suite extraite ou sous-suite de* $(u_n)_{\mathbb{N}}$ *toute suite de la forme* $v_n = u_{\phi(n)}$ *où* ϕ *est une extractrice.*
Exemples : $v_n = u_{2n}, u_{n^2}, u_{2n+1}$ *sont des suites extraites de* $(u_n)_{\mathbb{N}}$.

Proposition : (24)

(1) : *Si* $u_n \to \ell$*, pour toute extractrice* ϕ*, on a :* $u_{\phi(n)} \to \ell$.
(2) : *Si* $(u_n)_{\mathbb{N}}$ *est une suite réelle telle que les suites extraites* $(u_{2n})_{\mathbb{N}}$ *et* $(u_{2n+1})_{\mathbb{N}}$ *convergent* **vers la même limite** ℓ*, alors* $(u_n)_{\mathbb{N}}$ *converge et* $\lim u = \ell$.

Théorème (Bolzano-Weierstrass : (25)

De toute suite complexe bornée, on peut extraire une sous-suite convergente.

Utilisation des suites extraites : (26)

(1) : *Une suite ayant deux valeurs d'adhérence distinctes est divergente (condition suffisante).*
(2) : $u_n \underset{n\to\infty}{\not\longrightarrow} \ell \Longleftrightarrow \exists\, \varepsilon > 0$*, et* φ *extractrice tq* $\forall\, n \in \mathbb{N}, |u_{\varphi(n)} - \ell| \geqslant \varepsilon$.
(3) : (u_n) *est non bornée* $\Longleftrightarrow$ *il existe une extractrice* ϕ *telle que* $|u_\phi(n)| \to +\infty$.

VI — Comparaisons asymptotiques

Relations de comparaison : (27)

Soit (u_n) *et* (v_n) *des suites à valeurs dans* $\mathbb{C}$ *et* (λ_n) *une suite RÉELLE à valeurs dans* $\mathbb{R}_+$.
$u_n = o(\lambda_n) \Longleftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, N \in \mathbb{N}$ *tel que* $\forall\, n \geqslant N$*, on a* $|u_n| \leqslant \varepsilon\lambda_n$ *(*(λ_n) *positive).*
$u_n = O(\lambda_n) \Longleftrightarrow \exists\, M \in \mathbb{R},\ \exists\, N \in \mathbb{N}$ *tel que* $\forall\, n \geqslant N$*, on a* $|u_n| \leqslant M\lambda_n$ *(*(λ_n) *positive).*
$u_n \sim v_n \Longleftrightarrow u_n - v_n = o(|v_n|)$ *(c'est une relation d'équivalence).*
$u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \Longleftrightarrow u_n = o(1)$.
$u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ell \Longleftrightarrow u_n - \ell = o(1)$.
(u_n) *est bornée* $\Longleftrightarrow u_n = O(1)$.

Caractérisation : (28)

Soit (u_n) *et* (v_n) *des suites vectorielles à valeurs dans* E
Si (λ_n) *est à valeurs strictement positives :*
$u_n = o(\lambda_n) \Longleftrightarrow u_n/\lambda_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.
$u_n = O(\lambda_n) \Longleftrightarrow (u_n/\lambda_n)$ *est bornée.*
$\mu_n \sim \lambda_n \Longleftrightarrow \mu_n/\lambda_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$*. Dans ce cas,* $\mu_n > 0$ *pour* n *assez grand.*

Théorème / Méthode : (29)

(1) : *L'équivalence entre suites réelles est compatible avec la multiplication, la division et l'élévation à une puissance constante.*
(2) : *Pour toute autre opération entre suites équivalentes, écrire* $u_n = v_n + o(v_n)$*, substituer et simplifier.*

Théorèmes de croissances comparées : (30)

Pour tous α, β *réels strictement positifs,* $(\ln n)^\alpha = o(n^\beta)$ *;* $n^\alpha = o(\exp(\beta n)$ *et pour tous* $x > 1$*,* $n^\alpha = o(x^{\beta n})$.

VII — S'entrainer au calcul :

Exercice 6 : Limites, développements limités et équivalents

Déterminer les limites éventuelles des suites dont le terme général est donné ci-dessous.
Une fois la limite ℓ déterminée, préciser un équivalent de $u_n - \ell$.

1. $\dfrac{n^3\ln n - \exp(n)}{(\ln n)^2 + n^2}$;
2. $\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n$, *où* $x\in\mathbb{R}$;
3. $\left(1+\dfrac{1}{2^n}\right)^{n^2}$;
4. $\left(\dfrac{n-1}{n+1}\right)^n$;
5. $\left(\dfrac{n^2+5n+4}{n^2-3n+7}\right)^n$;
6. $\dfrac{\ln\left(\sqrt{\cos\left(\frac{1}{n}\right)}\right)}{\tan^2\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}$;
7. $\left(\exp\left(\dfrac{1}{n^2}-\dfrac{1}{3^n}\right)-1\right)(\ln n)^5$;
8. $\dfrac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\exp(\frac{1}{n}-1)}$;
9. $\dfrac{\exp\left(-\frac{1}{2n^2}\right)-\cos\left(\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{1-\frac{1}{n}}-1}$.
10. $\left(\cos\dfrac{1}{n\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{n}}$;
11. $\left(\sin\left(\dfrac{n\pi-1}{2n}\right)\right)^n$;
12. $\ln\left(\sqrt{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{n}\right)\right)$;
13. $\dfrac{\sin n + n}{3^n+(-1)^n-n}$;
14. $\dfrac{\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)\cos\frac{1}{n}}{\exp(\frac{1}{n^2})-1}$;
15. $\dfrac{1}{2}n^2\left(1-\cos\left(\dfrac{1}{n^2+1}\right)\right)$.
16. $\dfrac{1}{n^2}\sum_{k=1}^n\lfloor k\rfloor$
17. $\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)^n$
18. $\sqrt{n+(-1)^n}-\sqrt{n}$

VIII — Exercices TD

Exercice 7 : Suites récurrentes

Étudier les suites récurrentes suivantes :

$$\begin{cases} u_0 \in]-1,+\infty[\\ \forall n\in\mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}\end{cases} \qquad \begin{cases} u_0 \in [0,+\infty[\\ \forall n\in\mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{3}{1+3u_n}\end{cases} \qquad \begin{cases} u_0 \in [0,1] \\ \forall n\in\mathbb{N}, u_{n+1} = 1-u_n^2\end{cases}$$

$$\begin{cases} u_0 = 1, u_1 = e \\ \forall n\in\mathbb{N}, u_{n+2} = \sqrt{u_n u_{n+1}}\end{cases}$$

Exercice 8 : Variations autour de Cesàro

1. *Rappeler le résultat du théorème de Cesàro.*
2. *En déduire que si* (u_n) *est une suite telle que* $u_{n+1}-u_n \to \ell$, *alors* $\dfrac{u_n}{n}\to\ell$.
3. *Soit* (v_n) *une suite qui converge vers 0. Étudier la limite éventuelle de* $\dfrac{1}{2^n}\sum_{k=0}^n\binom{n}{k}v_k$.

Exercice 9 : Suite implicite

Soit $n\geqslant 3$. *On pose* $f_n(x) = x^n - nx + 1$.

1. *Justifier que l'équation* $f_n(x)=0$ *admet une unique solution dans* $]0,1[$. *On la note* x_n.
2. *En étudiant le signe de* $f_{n+1}(x_n)$ *et les variations de* f_n *sur* $[0,1]$, *étudier la monotonie de la suite* x_n.
3. *Donner alors un équivalent de* x_n.

Exercice 10 : Autour de d'Alembert

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de réels* **strictement positifs** *et* ℓ *tel que* $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\ell$.

1. *Démontrer que si* $\ell<1$, *alors il existe* $a\in[0,1[$ *et* $M\geqslant 0$ *tels que* $\forall n\in\mathbb{N}, u_n\leqslant Ma^n$.
2. *Pour tout* $n\in\mathbb{N}$, *on pose* $S_n=\sum_{k=0}^n u_k$.
   En déduire que si $\ell<1$, *alors la suite* $(S_n)_{\mathbb{N}}$ *est convergente.*
3. *Que dire si* $\ell>1$? *et si* $\ell=1$?

EXERCICE 1 analyse

1. On considère deux suites numériques $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est non nulle à partir d'un certain rang et $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$.
   Démontrer que u_n et v_n sont de même signe à partir d'un certain rang.
2. Déterminer le signe, au voisinage de l'infini, de : $u_n = \operatorname{sh}\left(\dfrac{1}{n}\right) - \tan\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

EXERCICE 43 analyse

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$.
On définit la suite (u_n) par $u_0 = x_0$ et, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \operatorname{Arctan}(u_n)$.

1. **a.** Démontrer que la suite (u_n) est monotone et déterminer, en fonction de la valeur de x_0, le sens de variation de (u_n).

   b. Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.
2. Déterminer l'ensemble des fonctions h, continues sur $\mathbb{R}$, telles que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $h(x) = h(\operatorname{Arctan} x)$.

EXERCICE 55 analyse

Soit a un nombre complexe.
On note E l'ensemble des suites à valeurs complexes telles que :
$\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 2au_{n+1} + 4(\mathrm{i}a - 1)u_n$ avec $(u_0, u_1) \in \mathbb{C}^2$.

1. **a.** Prouver que E est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des suites à valeurs complexes.

   b. Déterminer, en le justifiant, la dimension de E.
2. Dans cette question, on considère la suite de E définie par : $u_0 = 1$ et $u_1 = 1$.
   Exprimer, pour tout entier naturel n, le nombre complexe u_n en fonction de n.
   Indication : discuter suivant les valeurs de a.

EXERCICE 89 algèbre

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$. On pose $z = e^{\mathrm{i}\,\frac{2\pi}{n}}$.

1. On suppose $k \in [\![1, n-1]\!]$.
   Déterminer le module et un argument du complexe $z^k - 1$.
2. On pose $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \left|z^k - 1\right|$. Montrer que $S = \dfrac{2}{\tan \frac{\pi}{2n}}$.