Feuille 3 : dimension et thèmes classiques

Exercices 1-2-3-4

Des exercices élémentaires, bien détaillés, qu'il faut maîtriser parfaitement et même être capable de refaire en toute situation, sans indication !

Ce sont les questions que l'on doit se poser systèmatiquement :
- quelle est la dimension du s.e.v. F dans E ? dimension finie ? majorée par ? minorée par ?
- retrouver une base à partir d'équations cartésiennes, d'équations paramétriques.
- recollement de bases de sous espaces (supplémentaires ?)
- formule de Grassman (dimension de la somme)

Exercice 5

Polynômes de Lagrange

Connaître par coeur leur expression, être capable de l'expliquer, de la détailler.
L'interpolation se fait en des "abscisses" x_i qui doivent être 2 à 2 distinctes !!!
Par contre, les "ordonnées" y_i sont quelconques !
On interpole $n+1$ points avec un polynôme de degré **inférieur** ou égal à n.
Les polynômes interpolateurs de Lagrange forment une base de $\mathbb{K}_n[X]$ (cela se démontre par évaluation en les x_i).
Les coorodnnées d'un polynôme P sont $(P(x_0), P(x_1), \dots P(x_n))$.

Exercice 6

Pour montrer qu'une famille de polynôme est une base, souvent :
- on montrer que la famille est libre.
- on montre que son **cardinal** est égal à la **dimension** de l'espace

Pour montrer la liberté, on peut montrer
- que la famille est échelonnée en degrés
- que la famille est échelonnée en valuation,
- évaluer en des points x_i,
- montrer que les polynômes sont des vecteurs propres associés à des valeurs propres 2 à 2 distinctes d'un endomorphisme.

Exercice 7

Intuitivement, la dimension d'un espace vectoriel est égale **au nombre de degrés de liberté** disponible pour construire un élément de cet espace.
Par exemple, pour un espace de matrices, le nombre de coefficients "libres", pour un polynôme, le nombre de coefficients "libres", pour un espace de vecteurs, le nobmre de coordonnées "libres".
On peut donc se faire une idée rapide de la dimension d'un s.e.v. F.
Pour démontrer notre intuition, on peut construire un isomorphisme φ entre F et un espace $\mathbb{K}^n$, souvent par évaluation/projection/extraction.
Attention de bien vérifier que l'application φ est bien linéaire et bijective avant de conclure que $dim(F) = n$...
Remarque : la préimage de la base canonique de $\mathbb{K}^n$ est alors par isomorphisme une base de F, ce qui peut être utile !

Exercice 8

Un application linéaire est parfaitement déterminée par l'image d'une base quelconque de l'espace de départ.
Plus généralement, si $\oplus_{1 \leqslant i \leqslant n} F_i = E$, alors connaître $f \in L(E)$ est équivalent à connaître f sur chaque F_i !

Exercices 9-10-11

Rien que des applications des exercices précédents et des remarques qui ont été formulées !
Si vous rencontrez des problèmes, c'est que les points des exos précédents n'ont pas été suffisamment compris/travaillés/appris.

C'est l'occasion de faire un peu d'arithmétique des polynômes élémentaire (division eucildienne et Bézout/Gauss suffisent amplement en algèbre linéaire !!!)

Exercice 12

Exercice classique sur la "dérivation discrète" des polynômes.
À travailler plusieurs fois !

Exercice 13

Encore un bon exercice pour vérifier qu'on a compris ce qu'est chercher "intuitivement" la dimension d'un s.e.v. en étudiant le nombre de "degrés de liberté".
Attention toutefois : une fois la conjecture formulée au brouillon ou sur la copie, il faut **démontrer** le résultat !
C'est l'occasion de rappeler qu'il ne suffit pas de répondre à la question posée, et qu'il faut **démontrer son affirmation !**

Exercice 14

Résultat tellement intuitif et tellement technique à démontrer !
$\rightsquigarrow$ En dimension finie, la récurrence peut être utilisée lorsqu'on a envie de "fixer" les dimensions pour développer plus facilement une idée.
C'est encore l'occasion de rappeler qu'il ne suffit pas de répondre à la question posée, et qu'il faut **démontrer son affirmation !**

Exercice 15

Tellement classique sur les endomorphisme nilpotent. C'est la base de la réduction de Jordan : il y a beaucoup de preuves différentes (récurrences descendantes finies, absurde, contraposée).
Dans tous les cas, soignez votre rédaction : c'est une question souvent mal traitée.
Les résultats sont à connaître, ne serait-ce que pour la culture mathématique ! Evidemment, ils ne sont pas au programme officiel, donc il faut les redémontrer à chaque fois !

Exercice 16

Exactement les mêmes remarques que l'exercice 15 : un thème d'étude très classique à maîtriser parfaitement !
Des résultats sur les noyaux itérés/images itérées à connaître également pour la culture mathématique.

Exercice 17-18-19-20 : surtout pour les 5/2 et bons 3/2

Le thème des formes linéaires n'est plus très exploité dans les sujets de concours des dernières années, mais il est essentiel dans des preuves classiques de "dualité".
Cela constituait un chapitre entier des anciens programmes !
C'est un thème à (re)travailler pour les 5/2 ou les bons 3/2.
On note E^* l'ensemble de ces **formes** linéaires ($\mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ ou bien $\mathcal{L}(E, \mathbb{C})$.
Essentiellement, on retiendra que **si une forme linéaire est non nulle :**

- $dim(Imf) = dim(\mathbb{K}) = 1$ et donc en dimension finie, $dim(Kerf) = n - 1$
- deux formes linéaires sont proportionnelles ssi elles ont même noyau !
- le noyau d'une forme linéaire (non nulle) est un hyperplan, c'est à dire un espace de codimension égale à 1
- si E est de dimension finie, $dim(E^*) = dim(E)$.