I — BILAN FEUILLE 2 révision MPSI

Exercice 1

On parle de commutant. Sujet vaste, traité ici dans un cas très simple d'une matrice Jordanisée taille 2.
Alors oui, c'est facile, mais c'est un premier pas vers plein d'exercices similaires généralisés en taille n.
Par exemple, sauriez-vous démontrer que la dimension du commutant d'une matrice diagonalisable dont les valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ sont de multiplicité $n_1, \ldots n_p$ est égale à $\sum n_i^2$?
Nous reverrons ce thème du commutant d'une matrice dans les révisions du chapitre de réduction.

Exercices 2-3-4 voire 5,6 et 7

Autre thème classique, toujours sur des exemples très simples. Mais retenir les grands principes : pour calculer les puissances d'une matrice carrée, on peut :

— conjecturer une formule sur les premières puissances et la démontrer par récurrence. (cas particulier des matrices idempotentes ou bien des puissances périodiques)

— décomposer $A = \lambda I_n + N$ avec N nilpotente ou bien plu généralement, $A = D + N$ avec D diagonalisable, N nilpotente **et surtout** $DN = ND$. Appliquer le binôme de Newton en écrivant que D et N commutent !!!

— plus souvent chercher un polynôme annulateur **de petit degré** (sinon, ça sert à rien... et faire une division euclidienne, puis substituer les racines du polynôme annulateur, quitte à dériver la division euclidienne s'il y a des racines multiples.

Les exercices 5,6, et 7 portent encore sur les puissances d'une matrice carrée, mais cette fois, les puissances négatives.

Exercice 9 : application !

Le calcul de puissances de matrices permet par exemple de résoudre un système d'équations récurrentes croisées, par exemple ceux obtenus dans les exercices de probabilités par les formules de probabilités totales (chaînes de Markov)

Exercices 5,6

Evidemment, tout le monde doit savoir calculer l'inverse d'une matrice 3x3 par pivot de Gauss, mais il faut être capable de la généraliser en taille n dans des cas très simples.

Exercice 7

Grand classique : méthode à retenir. Si n est un élément nilpotent d'un anneau (pas forcément commutatif), alors $(1-n)$ est inversible et le calcul de l'inverse est donné par l'identité remarquable $(1=)1^p - n^p = (1-n)\cdot(1+n+\cdots+n^{p-1})$

Exercice 8

Pour déterminer le rang d'une matrice (possiblement associé à un endomorphisme), on **échelonne** les lignes ou les colonnes de la matrice par opérations élémentaires sur les lignes/colonnes ou par pivot de Gauss, puis, on compte le nombre de lignes (ou colonnes) non nulles.
Dans le cas d'une matrice à paramètre, on prendra autant que possible des pivots NON NULS pour échelonner la matrice

Exercice 10, 11

Grand classique : à ne pas confondre avec le commutant d'une matrice. Cette fois, on cherche **le centre** de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, c'est à dire l'ensemble des matrices qui commutent avec TOUTES les autres matrices !
Au minimum, savoir que cet ensemble ne contient que les matrices scalaires.
Ensuite, connaitre les étapes de la méthode des démonstrations :
1ère version matricielle : travailler par analyse-synthèse et les matrices élémentaires. Calculatoire, mais pas très difficile.
2ème version géométrique : plus courante dans les problèmes, puis jolie et surtout généralisable en dimension quelconque...
On veut montrer que si $x \neq y$, si $f(x) = \lambda_x x$ et $f(y) = \lambda_y y$ alors $\lambda_x = \lambda_y$. Pour cela, on distingue 2 cas :

- d'abord, si $(x : y)$ est une famille liée.
- ensuite, si (x, y) est une famille libre et en utilisant $x + y$!

La fin de l'exercice 11 est moins classique, mais on peut remarquer que **comme souvent, quand on veut montrer un résultat de réduction** (il existe une matrice semblable telle que... etc...), on procède **par récurrence** sur la taille de la matrice !

Exercice 12

Pour montrer que l'ensemble des matrices stochastiques est stable par produit, on peut aussi :

1. montrer que A est stochastique ssi le vecteur colonne $X =^t (11 \dots 1)$ est vecteur propre associé à la valeur propre 1
2. vérifier alors que $(AB)X = A(BX) = AX = X$... CQFD.

Le résultat sur l'inverse peut être connu, quoique pas très utile...

Exercice 13

Ici, c'est un exercice de réduction, mais dans le sens inhabituel : on nous donne les espaces propres et les valeurs propres (revoir les propriétés d'une projection ou d'une symétrie), et on peut en déduire la matrice associé par la formule de changement de bases : $A = PDP^{-1}$...

Exercice 14

Comprendre que pour déterminer la matrice d'un endomorphisme dans une base, il suffit de calculer les images des vecteurs qui compose cette base.
Ici, **l'espace de départ est un espace de matrices**, "seule" vraie difficulté de l'exercice.
Ne pas hésiter à donner des noms aux espaces et d'étudier les dimensions avant de se lancer dans les calculs !